Algebra liniowa

Zastosowania

Fryderyk Falniowski

Dynamika

- Równania różnicowe. Macierze Markowa. Definicje i własności
- Modelowanie migracji

Model przepływów międzygałęziowych (model Leontiewa)

- Model Leontiewa – wersja elementarna
- Model Leontiewa z nieco szerszej perspektywy
- Dynamika cen w zamkniętym modelu gospodarki

Algebraiczna metoda najmniejszych kwadratów

Dynamika

- Równania różnicowe. Macierze Markowa. Definicje i własności
- Modelowanie migracji

Model przepływów międzygałęziowych (model Leontiewa)

- Model Leontiewa – wersja elementarna
- Model Leontiewa z nieco szerszej perspektywy
- Dynamika cen w zamkniętym modelu gospodarki

Algebraiczna metoda najmniejszych kwadratów

Dynamika. Równania różnicowe

Niech $u_0 = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$. Ten wektor nazywać będziemy stanem początkowym układu. Na dany stan działamy macierzą $A \in M(n, n)$, którą nazywać będziemy macierzą przejścia. Otrzymujemy Au_0. Zatem w chwili $t = 1$ stan w jakim znajduje się badane zjawisko ma postać

$$u_1 = Au_0.$$

W chwili $t = 2$ mamy

$$u_2 = Au_1 = A^2 u_0.$$

Dynamika. Równania różnicowe

Niech $u_0 = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$. Ten wektor nazywać będziemy stanem początkowym układu. Na dany stan działamy macierzą $A \in M(n,n)$, którą nazywać będziemy macierzą przejścia. Otrzymujemy Au_0. Zatem w chwili $t = 1$ stan w jakim znajduje się badane zjawisko ma postać

$$u_1 = Au_0.$$

W chwili $t = 2$ mamy

$$u_2 = Au_1 = A^2 u_0.$$

Dynamika. Równania różnicowe

Niech $u_0 = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$. Ten wektor nazywać będziemy stanem początkowym układu. Na dany stan działamy macierzą $A \in M(n,n)$, którą nazywać będziemy macierzą przejścia. Otrzymujemy Au_0. Zatem w chwili $t = 1$ stan w jakim znajduje się badane zjawisko ma postać

$$u_1 = Au_0.$$

W chwili $t = 2$ mamy

$$u_2 = Au_1 = A^2 u_0.$$

Dynamika. Równania różnicowe

Niech $u_0 = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$. Ten wektor nazywać będziemy stanem początkowym układu. Na dany stan działamy macierzą $A \in M(n,n)$, którą nazywać będziemy macierzą przejścia. Otrzymujemy Au_0. Zatem w chwili $t = 1$ stan w jakim znajduje się badane zjawisko ma postać

$$u_1 = Au_0.$$

W chwili $t = 2$ mamy

$$u_2 = Au_1 = A^2 u_0.$$

Dynamika. Równania różnicowe

Niech $u_0 = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$. Ten wektor nazywać będziemy stanem początkowym układu. Na dany stan działamy macierzą $A \in M(n,n)$, którą nazywać będziemy macierzą przejścia. Otrzymujemy Au_0. Zatem w chwili $t = 1$ stan w jakim znajduje się badane zjawisko ma postać

$$u_1 = Au_0.$$

W chwili $t = 2$ mamy

$$u_2 = Au_1 = A^2 u_0.$$

Równanie różnicowe

Postępując tak dalej otrzymujemy, że w chwili $t = k + 1$

$$u_{k+1} = Au_k. \tag{1}$$

Równoważnie równanie (1) możemy zapisać w postaci

$$\boxed{u_{k+1} = A^{k+1}u_0}. \tag{2}$$

Dowolne równanie postaci (1) lub (2) nazywamy równaniem różnicowym. Można zastanawiać się co stanie się z układem (2) dla dużych k, a dokładniej do czego zmierzać będzie (u_k).

Równanie różnicowe

Postępując tak dalej otrzymujemy, że w chwili $t = k + 1$

$$u_{k+1} = Au_k. \tag{1}$$

Równoważnie równanie (1) możemy zapisać w postaci

$$\boxed{u_{k+1} = A^{k+1}u_0}. \tag{2}$$

Dowolne równanie postaci (1) lub (2) nazywamy równaniem różnicowym. Można zastanawiać się co stanie się z układem (2) dla dużych k, a dokładniej do czego zmierzać będzie (u_k).

Równanie różnicowe

Postępując tak dalej otrzymujemy, że w chwili $t = k + 1$

$$u_{k+1} = Au_k. \tag{1}$$

Równoważnie równanie (1) możemy zapisać w postaci

$$\boxed{u_{k+1} = A^{k+1}u_0}. \tag{2}$$

Dowolne równanie postaci (1) lub (2) nazywamy równaniem różnicowym. Można zastanawiać się co stanie się z układem (2) dla dużych k, a dokładniej do czego zmierzać będzie (u_k).

Stan graniczny, stan równowagi

Stanem granicznym nazywamy stan u_∞ taki, że

$$\lim_{k\to\infty} A^k u_0 = u_\infty.$$

Stanem równowagi układu nazywamy taki wektor x, dla którego

$$Ax = x$$

(a co za tym idzie $A^k x = x$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$).

Obserwacja

Stanem równowagi układu jest wektor własny macierzy A związany z wartością własną $\lambda = 1$.

Stan graniczny, stan równowagi

Stanem granicznym nazywamy stan u_∞ taki, że

$$\lim_{k\to\infty} A^k u_0 = u_\infty.$$

Stanem równowagi układu nazywamy taki wektor x, dla którego

$$Ax = x$$

(a co za tym idzie $A^k x = x$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$).

Obserwacja

Stanem równowagi układu jest wektor własny macierzy A związany z wartością własną $\lambda = 1$.

Stan graniczny, stan równowagi

Stanem granicznym nazywamy stan u_∞ taki, że

$$\lim_{k\to\infty} A^k u_0 = u_\infty.$$

Stanem równowagi układu nazywamy taki wektor x, dla którego

$$Ax = x$$

(a co za tym idzie $A^k x = x$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$).

Obserwacja

Stanem równowagi układu jest wektor własny macierzy A związany z wartością własną $\lambda = 1$.

Macierz dodatnia

Definicja

Macierz $A = (a_{ij})$ taką, że $a_{ij} > 0$ nazywamy macierzą dodatnią. W szczególności, dla $A \in M(n, 1)$, mówimy o wektorze dodatnim.

Definicja

Liczbę $\bar{\lambda}_A$ nazywamy dominującą wartością własną macierzy A, jeśli jest ona wartością własną A oraz $|\bar{\lambda}_A| > |\lambda|$ dla dowolnych $\lambda \in \mathbb{C}$ będących wartościami własnymi macierzy A.

Macierz dodatnia

Definicja

Macierz $A = (a_{ij})$ taką, że $a_{ij} > 0$ nazywamy macierzą dodatnią. W szczególności, dla $A \in M(n, 1)$, mówimy o wektorze dodatnim.

Definicja

Liczbę $\bar{\lambda}_A$ nazywamy dominującą wartością własną macierzy A, jeśli jest ona wartością własną A oraz $|\bar{\lambda}_A| > |\lambda|$ dla dowolnych $\lambda \in \mathbb{C}$ będących wartościami własnymi macierzy A.

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa

Twierdzenie (Twierdzenie Perrona-Frobeniusa)

Jeśli $A \in M(n, n)$ jest macierzą dodatnią, to posiada dominującą wartość własną $\bar{\lambda}_A > 0$. Ponadto każda współrzędna wektora własnego związanego z dominującą wartością własną jest dodatnia.

Co z nieujemnymi macierzami?

1. Każda macierz nieujemna może być otrzymana jako granica macierzy dodatnich. Stąd istnienie nieujemnego wektora własnego związanego z (rzeczywistą) wartością własną większą bądź równą (w module) niż wszystkie inne wartości własne.
2. Twierdzenie można rozszerzyć na nieujemne macierze nieredukowalne.

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa

Twierdzenie (Twierdzenie Perrona-Frobeniusa)

Jeśli $A \in M(n,n)$ jest macierzą dodatnią, to posiada dominującą wartość własną $\bar{\lambda}_A > 0$. Ponadto każda współrzędna wektora własnego związanego z dominującą wartością własną jest dodatnia.

Co z nieujemnymi macierzami?

1. Każda macierz nieujemna może być otrzymana jako granica macierzy dodatnich. Stąd istnienie nieujemnego wektora własnego związanego z (rzeczywistą) wartością własną większą bądź równą (w module) niż wszystkie inne wartości własne.
2. Twierdzenie można rozszerzyć na nieujemne macierze nieredukowalne.

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa

Twierdzenie (Twierdzenie Perrona-Frobeniusa)

Jeśli $A \in M(n, n)$ jest macierzą dodatnią, to posiada dominującą wartość własną $\bar{\lambda}_A > 0$. Ponadto każda współrzędna wektora własnego związanego z dominującą wartością własną jest dodatnia.

Co z nieujemnymi macierzami?

1. Każda macierz nieujemna może być otrzymana jako granica macierzy dodatnich. Stąd istnienie nieujemnego wektora własnego związanego z (rzeczywistą) wartością własną większą bądź równą (w module) niż wszystkie inne wartości własne.
2. Twierdzenie można rozszerzyć na nieujemne macierze nieredukowalne.

Macierz Markowa

Definicja

Macierz $A = (a_{ij})_{nn}$ nazywamy macierzą Markowa jeśli $a_{ij} \geq 0$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$.

Przykłady

Macierze Markowa: $\begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$.

Macierze $\begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0,9 & 1,2 \\ 0,1 & -0,2 \end{bmatrix}$ nie są macierzami Markowa.

Macierz Markowa

Definicja

Macierz $A = (a_{ij})_{nn}$ nazywamy macierzą Markowa jeśli $a_{ij} \geq 0$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, n\}$ oraz $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ dla każdego $i = 1, \dots, n$.

Przykłady

Macierze Markowa: $\begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$.

Macierze $\begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0,9 & 1,2 \\ 0,1 & -0,2 \end{bmatrix}$ nie są macierzami Markowa.

Macierz Markowa

Definicja

Macierz $A = (a_{ij})_{nn}$ nazywamy macierzą Markowa jeśli $a_{ij} \geq 0$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$.

Przykłady

Macierze Markowa: $\begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$.

Macierze $\begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0,9 & 1,2 \\ 0,1 & -0,2 \end{bmatrix}$ nie są macierzami Markowa.

Własności macierzy Markowa

Jeśli A jest macierzą Markowa, to

a) 1 jest wartością własną macierzy A,

b) Wektor własny v^1 związany z $\lambda = 1$ jest nieujemny oraz jest stanem równowagi, ponieważ $Av^1 = v^1$,

c) Wszystkie wartości własne spełniają zależność $|\lambda_i| \leq 1$ (gdzie $|\cdot|$ oznacza moduł (rzeczywisty lub zespolony)),

d) Jeśli A lub jakakolwiek potęga A jest macierzą dodatnią (wszystkie a_{ij} są dodatnie), to pozostałe wartości własne $|\lambda_i| < 1$. Oznacza to, że rozwiązanie $A^k u_0$ zmierza do v^1,

e) stan równowagi jest stanem granicznym.

Własności macierzy Markowa

Jeśli A jest macierzą Markowa, to

a) 1 jest wartością własną macierzy A,

b) Wektor własny v^1 związany z $\lambda = 1$ jest nieujemny oraz jest stanem równowagi, ponieważ $Av^1 = v^1$,

c) Wszystkie wartości własne spełniają zależność $|\lambda_i| \leq 1$ (gdzie $|\cdot|$ oznacza moduł (rzeczywisty lub zespolony)),

d) Jeśli A lub jakakolwiek potęga A jest macierzą dodatnią (wszystkie a_{ij} są dodatnie), to pozostałe wartości własne $|\lambda_i| < 1$. Oznacza to, że rozwiązanie $A^k u_0$ zmierza do v^1,

e) stan równowagi jest stanem granicznym.

Własności macierzy Markowa

Jeśli A jest macierzą Markowa, to

a) 1 jest wartością własną macierzy A,

b) Wektor własny v^1 związany z $\lambda = 1$ jest nieujemny oraz jest stanem równowagi, ponieważ $Av^1 = v^1$,

c) Wszystkie wartości własne spełniają zależność $|\lambda_i| \leq 1$ (gdzie $|\cdot|$ oznacza moduł (rzeczywisty lub zespolony)),

d) Jeśli A lub jakakolwiek potęga A jest macierzą dodatnią (wszystkie a_{ij} są dodatnie), to pozostałe wartości własne $|\lambda_i| < 1$. Oznacza to, że rozwiązanie $A^k u_0$ zmierza do v^1,

e) stan równowagi jest stanem granicznym.

Własności macierzy Markowa

Jeśli A jest macierzą Markowa, to

a) 1 jest wartością własną macierzy A,
b) Wektor własny v^1 związany z $\lambda = 1$ jest nieujemny oraz jest stanem równowagi, ponieważ $Av^1 = v^1$,
c) Wszystkie wartości własne spełniają zależność $|\lambda_i| \leq 1$ (gdzie $|\cdot|$ oznacza moduł (rzeczywisty lub zespolony)),
d) Jeśli A lub jakakolwiek potęga A jest macierzą dodatnią (wszystkie a_{ij} są dodatnie), to pozostałe wartości własne $|\lambda_i| < 1$. Oznacza to, że rozwiązanie $A^k u_0$ zmierza do v^1,
e) stan równowagi jest stanem granicznym.

Własności macierzy Markowa

Jeśli A jest macierzą Markowa, to

a) 1 jest wartością własną macierzy A,

b) Wektor własny v^1 związany z $\lambda = 1$ jest nieujemny oraz jest stanem równowagi, ponieważ $Av^1 = v^1$,

c) Wszystkie wartości własne spełniają zależność $|\lambda_i| \leq 1$ (gdzie $|\cdot|$ oznacza moduł (rzeczywisty lub zespolony)),

d) Jeśli A lub jakakolwiek potęga A jest macierzą dodatnią (wszystkie a_{ij} są dodatnie), to pozostałe wartości własne $|\lambda_i| < 1$. Oznacza to, że rozwiązanie $A^k u_0$ zmierza do v^1,

e) stan równowagi jest stanem granicznym.

Dynamika

- Równania różnicowe. Macierze Markowa. Definicje i własności
- Modelowanie migracji

Model przepływów międzygałęziowych (model Leontiewa)

- Model Leontiewa – wersja elementarna
- Model Leontiewa z nieco szerszej perspektywy
- Dynamika cen w zamkniętym modelu gospodarki

Algebraiczna metoda najmniejszych kwadratów

Migracje

Rozpatrzmy następujący problem: interesuje nas migracja z i do województwa małopolskiego. Załóżmy, że

w każdym roku $\frac{1}{10}$ ludzi spoza województwa sprowadza się, a $\frac{2}{10}$ ludzi opuszcza województwo. Rozpoczynamy z y_0 ludzi mieszkających poza województwem oraz z_0 mieszkających w województwie.

Jak taki proces będzie działał w wieloletniej perspektywie czasowej?

po roku...

Po roku liczba osób mieszkających poza i w województwie to y_1, z_1, gdzie

$$y_1 = 0,9y_0 + 0,2z_0$$

$$z_1 = 0,1y_0 + 0,8z_0$$

lub

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

po k latach ...

Macierz przejścia dla tego układu

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$$

spełnia dwie własności:

1. wyrazy w każdej kolumnie sumują się do 1 (każdy człowiek albo migruje albo nie)
2. wszystkie wyrazy w macierzy są nieujemne (proporcje ludności muszą być liczbami z przedziału $[0,1]$).

Jest to zatem macierz Markowa.

Interesuje nas

$$u_k = \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

po k latach ...

Macierz przejścia dla tego układu

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$$

spełnia dwie własności:

1. wyrazy w każdej kolumnie sumują się do 1 (każdy człowiek albo migruje albo nie)
2. wszystkie wyrazy w macierzy są nieujemne (proporcje ludności muszą być liczbami z przedziału $[0,1]$).

Jest to zatem macierz Markowa.
Interesuje nas

$$u_k = \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizacja A

W tym celu diagonalizujemy macierz $A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0,9-\lambda & 0,2 \\ 0,1 & 0,8-\lambda \end{bmatrix} \;\text{ oraz }\; \det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 1,7\lambda + 0,7;$$

$$\lambda_1 = 1 \;\text{ i }\; \lambda_2 = 0,7$$

$$v^1 = c\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \;\; v^2 = c\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \;\; P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \;\; D_\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

$$A = PD_\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizacja A

W tym celu diagonalizujemy macierz $A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0,9-\lambda & 0,2 \\ 0,1 & 0,8-\lambda \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 1,7\lambda + 0,7;$$

$$\lambda_1 = 1 \ \text{ i } \ \lambda_2 = 0,7$$

$$v^1 = c\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ v^2 = c\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ D_\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

$$A = PD_\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizacja A

W tym celu diagonalizujemy macierz $A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0,9-\lambda & 0,2 \\ 0,1 & 0,8-\lambda \end{bmatrix} \ \text{ oraz } \ \det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 1,7\lambda + 0,7;$$

$$\lambda_1 = 1 \ \text{ i } \ \lambda_2 = 0,7$$

$$v^1 = c\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ v^2 = c\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ D_\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

$$A = PD_\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizacja A

W tym celu diagonalizujemy macierz $A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0,9-\lambda & 0,2 \\ 0,1 & 0,8-\lambda \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1,7\lambda + 0,7;$$

$$\lambda_1 = 1 \ \text{ i } \ \lambda_2 = 0,7$$

$$v^1 = c\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad v^2 = c\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad D_\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

$$A = PD_\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizacja A

W tym celu diagonalizujemy macierz $A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0,9-\lambda & 0,2 \\ 0,1 & 0,8-\lambda \end{bmatrix} \;\text{ oraz }\; \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1,7\lambda + 0,7;$$

$$\lambda_1 = 1 \;\text{ i }\; \lambda_2 = 0,7$$

$$v^1 = c\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \;\; v^2 = c\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \;\; P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \;\; D_\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

$$A = PD_\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczanie $\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix}$

Obliczamy

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie $\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix}$

Obliczamy

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie $\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix}$

Obliczamy

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} &= A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 + z_0 \\ y_0 - 2z_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Wyznaczanie $\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix}$

Obliczamy

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} &= A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 + z_0 \\ y_0 - 2z_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 + z_0 \\ 0,7^k(y_0 - 2z_0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Wyznaczanie $\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix}$

Obliczamy

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} &= A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 + z_0 \\ y_0 - 2z_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 + z_0 \\ 0,7^k(y_0 - 2z_0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(y_0 + z_0) + \frac{1}{3}0,7^k(y_0 - 2z_0) \\ \frac{1}{3}(y_0 + z_0) - \frac{1}{3}0,7^k(y_0 - 2z_0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Wyznaczanie $\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix}$

Obliczamy

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} &= A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 + z_0 \\ y_0 - 2z_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 + z_0 \\ 0,7^k(y_0 - 2z_0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(y_0 + z_0) + \frac{1}{3}0,7^k(y_0 - 2z_0) \\ \frac{1}{3}(y_0 + z_0) - \frac{1}{3}0,7^k(y_0 - 2z_0) \end{bmatrix} \\
&= (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + (y_0 - 2z_0)0,7^k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + (y_0 - 2z_0)0,7^k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że ostatnie wyrażenie ma postać $c_1\lambda_1^k v^1 + c_2\lambda_2^k v^2$, gdzie $c_1 = y_0 + z_0$, $c_2 = y_0 - 2z_0$. Dla dużych k czynnik $0,7^k$ będzie bardzo mały. Zatem dla dużych k wektor u_k będzie bliski stanowi:

$$u_\infty = \begin{bmatrix} y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

który jest stanem granicznym tego układu.

Równocześnie $v^1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ jest stanem równowagi układu.

Otrzymaliśmy

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + (y_0 - 2z_0)0,7^k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że ostatnie wyrażenie ma postać $c_1\lambda_1^k v^1 + c_2\lambda_2^k v^2$, gdzie $c_1 = y_0 + z_0$, $c_2 = y_0 - 2z_0$. Dla dużych k czynnik $0,7^k$ będzie bardzo mały. Zatem dla dużych k wektor u_k będzie bliski stanowi:

$$u_\infty = \begin{bmatrix} y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

który jest stanem granicznym tego układu.

Równocześnie $v^1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ jest stanem równowagi układu.

Otrzymaliśmy

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + (y_0 - 2z_0)0,7^k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że ostatnie wyrażenie ma postać $c_1\lambda_1^k v^1 + c_2\lambda_2^k v^2$, gdzie $c_1 = y_0 + z_0$, $c_2 = y_0 - 2z_0$. Dla dużych k czynnik $0,7^k$ będzie bardzo mały. Zatem dla dużych k wektor u_k będzie bliski stanowi:

$$u_\infty = \begin{bmatrix} y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

który jest stanem granicznym tego układu.
Równocześnie $v^1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ jest stanem równowagi układu.

Migracja – podsumowanie

- Całkowita populacja wynosi nadal $y_0 + z_0$, ale ostatecznie (w „nieskończonej przyszłości”) $\frac{1}{3}$ populacji będzie mieszkało w Małopolsce, $\frac{2}{3}$ poza.
- Ma to miejsce niezależnie od początkowego rozkładu tej populacji.
- jeśli na początku roku startujemy z $\frac{1}{3}$ wewnątrz i $\frac{2}{3}$ poza, to po roku stan jest ten sam:

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad Au_\infty = u_\infty.$$

Ten punkt jest stanem równowagi układu.

Migracja – podsumowanie

- Całkowita populacja wynosi nadal $y_0 + z_0$, ale ostatecznie (w „nieskończonej przyszłości”) $\frac{1}{3}$ populacji będzie mieszkało w Małopolsce, $\frac{2}{3}$ poza.
- Ma to miejsce niezależnie od początkowego rozkładu tej populacji.
- jeśli na początku roku startujemy z $\frac{1}{3}$ wewnątrz i $\frac{2}{3}$ poza, to po roku stan jest ten sam:

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad Au_\infty = u_\infty .$$

Ten punkt jest stanem równowagi układu.

Migracja – podsumowanie

- Całkowita populacja wynosi nadal $y_0 + z_0$, ale ostatecznie (w „nieskończonej przyszłości”) $\frac{1}{3}$ populacji będzie mieszkało w Małopolsce, $\frac{2}{3}$ poza.
- Ma to miejsce niezależnie od początkowego rozkładu tej populacji.
- jeśli na początku roku startujemy z $\frac{1}{3}$ wewnątrz i $\frac{2}{3}$ poza, to po roku stan jest ten sam:

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad Au_\infty = u_\infty.$$

Ten punkt jest stanem równowagi układu.

Dynamika

- Równania różnicowe. Macierze Markowa. Definicje i własności
- Modelowanie migracji

Model przepływów międzygałęziowych (model Leontiewa)

- Model Leontiewa – wersja elementarna
- Model Leontiewa z nieco szerszej perspektywy
- Dynamika cen w zamkniętym modelu gospodarki

Algebraiczna metoda najmniejszych kwadratów

Model Leontiewa – kontekst

Rozpatrzmy gospodarkę, którą można podzielić na sektory (gałęzie). Chcemy efektywnie ustalać konieczne nakłady tych sektorów, oczekiwane produkty końcowe etc. Stworzymy matematyczny model gospodarki, w którym można będzie, stosując rachunek macierzowy badać zależności pomiędzy sektorami tejże gospodarki. Model ten będzie opisywał jeden aspekt gospodarki – jej zdolność do produkcji rozmaitych dóbr.

Model Leontiewa – kontekst

Rozpatrzmy gospodarkę, którą można podzielić na sektory (gałęzie). Chcemy efektywnie ustalać konieczne nakłady tych sektorów, oczekiwane produkty końcowe etc. Stworzymy matematyczny model gospodarki, w którym można będzie, stosując rachunek macierzowy badać zależności pomiędzy sektorami tejże gospodarki. Model ten będzie opisywał jeden aspekt gospodarki – jej zdolność do produkcji rozmaitych dóbr.

Model Leontiewa – kontekst

Rozpatrzmy gospodarkę, którą można podzielić na sektory (gałęzie). Chcemy efektywnie ustalać konieczne nakłady tych sektorów, oczekiwane produkty końcowe etc. Stworzymy matematyczny model gospodarki, w którym można będzie, stosując rachunek macierzowy badać zależności pomiędzy sektorami tejże gospodarki. Model ten będzie opisywał jeden aspekt gospodarki – jej zdolność do produkcji rozmaitych dóbr.

Założenia modelu

Zał. 1. Produkcja każdego dobra wymaga użycia przynajmniej jednego innego dobra.

Zał. 2. Wysokość wkładu jest proporcjonalna do otrzymanej wielkości produkcji,tzn. dla dowolnego i

$$\text{wkład}_i = c_{ij} \times \text{produkcja}_j,$$

$i, j = 1, \ldots, n$, gdzie c_{ij} jest stałe.

Zał. 3. Każda technika produkcyjna produkuje tylko jedno dobro.

Zał. 4. Każda technika produkcyjna pozwala wyprodukować więcej niż sama zużywa.

Zał. 5 Macierz konsumpcji C jest produktywna, tzn. istnieje dodatni wektor x taki, że $x > Cx$ ($x_i > (Cx)_i \; \forall i$).

Założenia modelu

Zał. 1. Produkcja każdego dobra wymaga użycia przynajmniej jednego innego dobra.

Zał. 2. Wysokość wkładu jest proporcjonalna do otrzymanej wielkości produkcji,tzn. dla dowolnego i

$$\text{wkład}_i = c_{ij} \times \text{produkcja}_j,$$

$i, j = 1, \ldots, n$, gdzie c_{ij} jest stałe.

Zał. 3. Każda technika produkcyjna produkuje tylko jedno dobro.

Zał. 4. Każda technika produkcyjna pozwala wyprodukować więcej niż sama zużywa.

Zał. 5 Macierz konsumpcji C jest produktywna, tzn. istnieje dodatni wektor x taki, że $x > Cx$ ($x_i > (Cx)_i \ \forall i$).

Założenia modelu

Zał. 1. Produkcja każdego dobra wymaga użycia przynajmniej jednego innego dobra.

Zał. 2. Wysokość wkładu jest proporcjonalna do otrzymanej wielkości produkcji,tzn. dla dowolnego i

$$\text{wkład}_i = c_{ij} \times \text{produkcja}_j,$$

$i, j = 1, \ldots, n$, gdzie c_{ij} jest stałe.

Zał. 3. Każda technika produkcyjna produkuje tylko jedno dobro.

Zał. 4. Każda technika produkcyjna pozwala wyprodukować więcej niż sama zużywa.

Zał. 5 Macierz konsumpcji C jest produktywna, tzn. istnieje dodatni wektor x taki, że $x > Cx$ ($x_i > (Cx)_i \ \forall i$).

Założenia modelu

Zał. 1. Produkcja każdego dobra wymaga użycia przynajmniej jednego innego dobra.

Zał. 2. Wysokość wkładu jest proporcjonalna do otrzymanej wielkości produkcji,tzn. dla dowolnego i

$$\text{wkład}_i = c_{ij} \times \text{produkcja}_j,$$

$i, j = 1, \ldots, n$, gdzie c_{ij} jest stałe.

Zał. 3. Każda technika produkcyjna produkuje tylko jedno dobro.

Zał. 4. Każda technika produkcyjna pozwala wyprodukować więcej niż sama zużywa.

Zał. 5 Macierz konsumpcji C jest produktywna, tzn. istnieje dodatni wektor x taki, że $x > Cx$ $(x_i > (Cx)_i \ \forall i)$.

Założenia modelu

Zał. 1. Produkcja każdego dobra wymaga użycia przynajmniej jednego innego dobra.

Zał. 2. Wysokość wkładu jest proporcjonalna do otrzymanej wielkości produkcji,tzn. dla dowolnego i

$$\text{wkład}_i = c_{ij} \times \text{produkcja}_j,$$

$i, j = 1, \ldots, n$, gdzie c_{ij} jest stałe.

Zał. 3. Każda technika produkcyjna produkuje tylko jedno dobro.

Zał. 4. Każda technika produkcyjna pozwala wyprodukować więcej niż sama zużywa.

Zał. 5 Macierz konsumpcji C jest produktywna, tzn. istnieje dodatni wektor x taki, że $x > Cx$ $(x_i > (Cx)_i \ \forall i)$.

Załóżmy, że nasza gospodarka podzielona jest na 2 gałęzie S_1 i S_2 oraz, że mamy dane dotyczące produkcji (a co za tym idzie konsumpcji) dla każdego z sektorów. Dane te zestawiamy w tzw. tabeli przepływów międzygałęziowych $Y = (y_{ij})_{22}$, gdzie $y_{ij} \geq 0$ oznacza wielkość konsumpcji produktu j-tego sektora w sektorze i-tym:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{c}\text{produkowane}\\ \text{przez gałąź}\end{array} \\
 & & \begin{array}{cc} S_1 & S_2 \end{array} \\
\begin{array}{c}\text{konsumowane}\\ \text{przez gałąź}\end{array} & \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}
\end{array}$$

Oznaczmy przez $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ wektor produkcji globalnej (całkowitej), gdzie x_j to całkowita produkcja j-tej gałęzi. Załóżmy, że całkowita produkcja każdej z gałęzi jest częściowo konsumowana przez pozostałe gałęzie, tzn:

$$y_{11} + y_{21} < x_1, \quad y_{12} + y_{22} < x_2. \tag{4}$$

Zadajmy macierz konsumpcji (współczynników kosztów) $C = (c_{ij})_{22}$ jako

$$(c_{ij}) \stackrel{\mathrm{dF}}{=} \left(\frac{y_{ij}}{x_j}\right). \tag{5}$$

Oznaczmy przez $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ wektor produkcji globalnej (całkowitej), gdzie x_j to całkowita produkcja j-tej gałęzi. Załóżmy, że całkowita produkcja każdej z gałęzi jest częściowo konsumowana przez pozostałe gałęzie, tzn:

$$y_{11} + y_{21} < x_1, \quad y_{12} + y_{22} < x_2. \tag{4}$$

Zadajmy macierz konsumpcji (współczynników kosztów) $C = (c_{ij})_{22}$ jako

$$(c_{ij}) \stackrel{\text{dF}}{=} \left(\frac{y_{ij}}{x_j} \right). \tag{5}$$

Oznaczmy przez $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ wektor produkcji globalnej (całkowitej), gdzie x_j to całkowita produkcja j-tej gałęzi. Załóżmy, że całkowita produkcja każdej z gałęzi jest częściowo konsumowana przez pozostałe gałęzie, tzn:

$$y_{11} + y_{21} < x_1, \quad y_{12} + y_{22} < x_2. \tag{4}$$

Zadajmy macierz konsumpcji (współczynników kosztów) $C = (c_{ij})_{22}$ jako

$$(c_{ij}) \stackrel{\text{dF}}{=} \left(\frac{y_{ij}}{x_j} \right). \tag{5}$$

Zatem jeśli sektory S_1, S_2 produkują x_1, x_2 jednostek, to jeśli dany jest wektor produkcji $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, gdzie $x_i \geq 0$, to

$$\begin{aligned} Cx &= \begin{bmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{całkowita produkcja (w j.p.) produktu } S_1 \\ \text{przy wykorzystaniu produktów sektorów } S_1, S_2 \\ \text{całkowita produkcja (w j.p.) produktu } S_2 \\ \text{przy wykorzystaniu produktów sektorów } S_1, S_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Każda suma elementów kolumny przedstawia częściowy koszt nakładów zużytych na wyprodukowanie ilości pewnego dobra wartej 1 j.p. Oznacza to, że

$$c_{11} + c_{21} < 1, \quad c_{12} + c_{22} < 1 \tag{6}$$

co na podstawie definicji c_{ij} jest równoważne nierówności (4). Otrzymaliśmy zatem ekonomiczne uzasadnienie założenia (4).

Zatem jeśli sektory S_1, S_2 produkują x_1, x_2 jednostek, to jeśli dany jest wektor produkcji $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, gdzie $x_i \geq 0$, to

$$
\begin{aligned}
Cx &= \begin{bmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \text{całkowita produkcja (w j.p.) produktu } S_1 \\ \text{przy wykorzystaniu produktów sektorów } S_1, S_2 \\ \text{całkowita produkcja (w j.p.) produktu } S_2 \\ \text{przy wykorzystaniu produktów sektorów } S_1, S_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Każda suma elementów kolumny przedstawia częściowy koszt nakładów zużytych na wyprodukowanie ilości pewnego dobra wartej 1 j.p. Oznacza to, że

$$c_{11} + c_{21} < 1, \;\; c_{12} + c_{22} < 1 \tag{6}$$

co na podstawie definicji c_{ij} jest równoważne nierówności (4). Otrzymaliśmy zatem ekonomiczne uzasadnienie założenia (4).

O sektorze S_j, którego produkty nie są w całości konsumowane przez sektory S_1, S_2 (tzn. spełniony jest warunek (6)) będziemy mówili, że jest on dochodowy.

W modelu uwzględnić musimy również tzw. otwarty sektor. Jest on bezproduktywny, nie produkuje niczego co mogłoby zostać wykorzystane przez sektory S_1, S_2. Sektor ten jedynie potrzebuje dóbr (produktów) wytwarzanych przez sektory S_1, S_2. Ze względu na nierówność w (4) wiemy, że nie cała produkcja jest konsumowana przez gospodarkę, pozostaje więc coś, co możemy przeznaczyć dla nowego sektora. Otrzymane nadwyżki umieszcza się w tzw. wektorze zapotrzebowania zewnętrznego (produkcji końcowej, popytu końcowego) $d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}^T$. Interesuje nas czy możliwe jest aby ustalić poziom produkcji x tak aby zarówno produktywne jak i otwarte sektory osiągały optimum wykorzystując jednocześnie wszystkie produkty.

O sektorze S_j, którego produkty nie są w całości konsumowane przez sektory S_1, S_2 (tzn. spełniony jest warunek (6)) będziemy mówili, że jest on dochodowy.

W modelu uwzględnić musimy również tzw. otwarty sektor. Jest on bezproduktywny, nie produkuje niczego co mogłoby zostać wykorzystane przez sektory S_1, S_2. Sektor ten jedynie potrzebuje dóbr (produktów) wytwarzanych przez sektory S_1, S_2. Ze względu na nierówność w (4) wiemy, że nie cała produkcja jest konsumowana przez gospodarkę, pozostaje więc coś, co możemy przeznaczyć dla nowego sektora. Otrzymane nadwyżki umieszcza się w tzw. wektorze zapotrzebowania zewnętrznego (produkcji końcowej, popytu końcowego) $d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}^T$. Interesuje nas czy możliwe jest aby ustalić poziom produkcji x tak aby zarówno produktywne jak i otwarte sektory osiągały optimum wykorzystując jednocześnie wszystkie produkty.

Równanie modelu

Matematycznie problem sprowadza się do następującej zależności:

Model Leontiewa gospodarki otwartej

$$\underset{\text{całkowita produkcja}}{x} = \underset{\substack{\text{zapotrzebowanie}\\ \text{z sektora produkcyjnego}\\ \text{do wyprodukowania } x}}{Cx} + \underset{\substack{\text{zapotrzebowanie}\\ \text{z sektora otwartego}\\ \text{do wyprodukowania } x}}{d}$$

Równoważnie

$$Lx = d, \tag{7}$$

gdzie $L = I - C$.

Kilka pojęć

Macierz L nazywana jest macierzą Leontiewa lub macierzą struktury technicznej, a jej macierz odwrotna L^{-1} (która istnieje dla gospodarki otwartej) macierzą współczynników materiałochłonności lub macierzą współczynników dodatkowego zapotrzebowania. Przy jej pomocy możemy wyznaczyć wektor produkcji globalnej (wektor, dla którego zapotrzebowania wewnętrzne i zewnętrzne są zaspokojone):

$$x = L^{-1}d.$$

Model Leontiewa – nieco ogólniejsza definicja

Model Leontiewa gospodarki otwartej

$$\underset{\text{całkowita produkcja}}{x} = \underset{\substack{\text{zapotrzebowanie} \\ \text{z sektora produkcyjnego} \\ \text{do wyprodukowania } x}}{Cx} + \underset{\substack{\text{zapotrzebowanie} \\ \text{z sektora otwartego} \\ \text{do wyprodukowania } x}}{d}$$

Równoważnie

$$Lx = d, \tag{8}$$

gdzie $L = I - C$.

Zał. 1. Macierz C jest nieujemna oraz $\forall_j \exists_i \; c_{ij} > 0$.

Zał. 2. C jest kwadratowa.

Zał. 3. Każda technika produkcyjna produkuje tylko jedno dobro.

Zał. 4. Macierz C pozostaje nie zmieniona gdy wektor x się zmienia

Zał. 5 Macierz konsumpcji C jest produktywna, tzn. istnieje dodatni wektor x taki, że $x > Cx$.

Przykład — ćwiczenie

Dana jest tabela przepływów

Sektor	Produkcja globalna	Przepływy	Produkcja końcowa
S_1	200	100 20	80
S_2	100	30 40	30

1. Wyznacz macierz konsumpcji C.
2. Mając daną macierz konsumpcji oraz wektor zapotrzebowania zewnętrznego $d = \begin{bmatrix} 1000 & 200 \end{bmatrix}^T$ wyznacz wektor produkcji globalnej.

Dynamika

- Równania różnicowe. Macierze Markowa. Definicje i własności
- Modelowanie migracji

Model przepływów międzygałęziowych (model Leontiewa)

- Model Leontiewa – wersja elementarna
- Model Leontiewa z nieco szerszej perspektywy
- Dynamika cen w zamkniętym modelu gospodarki

Algebraiczna metoda najmniejszych kwadratów

Warunki istnienia rozwiązania

Interesuje nas równanie

$$Lx = d, \tag{9}$$

gdzie x jest wektorem produkcji, a d wektorem produktów końcowych bądź wektorem zapotrzebowania.

Powiedzmy, że chcemy uzyskać $d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{bmatrix}^T$ produktów. W tym celu musimy znaleźć wektor x z równania (9).

Jakie są warunki istnienia (ekonomicznie sensownego) rozwiązania (9)?

Warunki istnienia rozwiązania

Interesuje nas równanie

$$Lx = d, \tag{9}$$

gdzie x jest wektorem produkcji, a d wektorem produktów końcowych bądź wektorem zapotrzebowania.
Powiedzmy, że chcemy uzyskać $d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{bmatrix}^T$ produktów. W tym celu musimy znaleźć wektor x z równania (9).

Jakie są warunki istnienia (ekonomicznie sensownego) rozwiązania (9)?

Warunki istnienia rozwiązania

Interesuje nas równanie

$$Lx = d, \tag{9}$$

gdzie x jest wektorem produkcji, a d wektorem produktów końcowych bądź wektorem zapotrzebowania.
Powiedzmy, że chcemy uzyskać $d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{bmatrix}^T$ produktów. W tym celu musimy znaleźć wektor x z równania (9).

Jakie są warunki istnienia (ekonomicznie sensownego) rozwiązania (9)?

warunki na istnienie C, x

1. L musi być nieosobliwa, wtedy
$$x = L^{-1}d. \tag{10}$$
2. wynik musi mieć ekonomiczny sens – produkcja x musi być wektorem nieujemnym.

Musimy zatem odpowiedzieć na pytanie:

kiedy $L^{-1} = (I - C)^{-1}$ jest macierzą nieujemną?

warunki na istnienie C, x

1. L musi być nieosobliwa, wtedy

$$x = L^{-1}d. \tag{10}$$

2. wynik musi mieć ekonomiczny sens – produkcja x musi być wektorem nieujemnym.

Musimy zatem odpowiedzieć na pytanie:

kiedy $L^{-1} = (I - C)^{-1}$ jest macierzą nieujemną?

warunki na istnienie C, x

1. L musi być nieosobliwa, wtedy
$$x = L^{-1}d. \tag{10}$$
2. wynik musi mieć ekonomiczny sens – produkcja x musi być wektorem nieujemnym.

Musimy zatem odpowiedzieć na pytanie:

kiedy $L^{-1} = (I - C)^{-1}$ jest macierzą nieujemną?

warunki na istnienie C, x

1. L musi być nieosobliwa, wtedy
$$x = L^{-1}d. \tag{10}$$
2. wynik musi mieć ekonomiczny sens – produkcja x musi być wektorem nieujemnym.

Musimy zatem odpowiedzieć na pytanie:

kiedy $L^{-1} = (I - C)^{-1}$ jest macierzą nieujemną?

Kolejne zastosowanie twierdzenia Frobeniusa-Perrona

Kluczowa jest dominująca wartość własna, oznaczmy ją przez $\bar{\lambda}_C$, która musi być mniejsza od 1, ponieważ

- jeśli $\bar{\lambda}_C > 1$, to $(I - C)^{-1}$ nie jest nieujemna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C = 1$, to $I - C$ nie jest odwracalna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C < 1$, to $(I - C)^{-1}$ istnieje i jest nieujemna. Ponadto, jeśli $I - C$ jest dodatnia, to wektor v też jest dodatni.

W ostatnim przypadku, gdy $\bar{\lambda}_C < 1$, mówimy, że gospodarka jest wydajna. Odpowiada to przypadkowi, gdy mamy do czynienia z gospodarką otwartą.

Kolejne zastosowanie twierdzenia Frobeniusa-Perrona

Kluczowa jest dominująca wartość własna, oznaczmy ją przez $\bar{\lambda}_C$, która musi być mniejsza od 1, ponieważ

- jeśli $\bar{\lambda}_C > 1$, to $(I - C)^{-1}$ nie jest nieujemna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C = 1$, to $I - C$ nie jest odwracalna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C < 1$, to $(I - C)^{-1}$ istnieje i jest nieujemna. Ponadto, jeśli $I - C$ jest dodatnia, to wektor v też jest dodatni.

W ostatnim przypadku, gdy $\bar{\lambda}_C < 1$, mówimy, że gospodarka jest wydajna. Odpowiada to przypadkowi, gdy mamy do czynienia z gospodarką otwartą.

Kolejne zastosowanie twierdzenia Frobeniusa-Perrona

Kluczowa jest dominująca wartość własna, oznaczmy ją przez $\bar{\lambda}_C$, która musi być mniejsza od 1, ponieważ

- jeśli $\bar{\lambda}_C > 1$, to $(I - C)^{-1}$ nie jest nieujemna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C = 1$, to $I - C$ nie jest odwracalna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C < 1$, to $(I - C)^{-1}$ istnieje i jest nieujemna. Ponadto, jeśli $I - C$ jest dodatnia, to wektor v też jest dodatni.

W ostatnim przypadku, gdy $\bar{\lambda}_C < 1$, mówimy, że gospodarka jest wydajna. Odpowiada to przypadkowi, gdy mamy do czynienia z gospodarką otwartą.

Kolejne zastosowanie twierdzenia Frobeniusa-Perrona

Kluczowa jest dominująca wartość własna, oznaczmy ją przez $\bar{\lambda}_C$, która musi być mniejsza od 1, ponieważ

- jeśli $\bar{\lambda}_C > 1$, to $(I - C)^{-1}$ nie jest nieujemna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C = 1$, to $I - C$ nie jest odwracalna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C < 1$, to $(I - C)^{-1}$ istnieje i jest nieujemna. Ponadto, jeśli $I - C$ jest dodatnia, to wektor v też jest dodatni.

W ostatnim przypadku, gdy $\bar{\lambda}_C < 1$, mówimy, że gospodarka jest wydajna. Odpowiada to przypadkowi, gdy mamy do czynienia z gospodarką otwartą.

Kolejne zastosowanie twierdzenia Frobeniusa-Perrona

Kluczowa jest dominująca wartość własna, oznaczmy ją przez $\bar{\lambda}_C$, która musi być mniejsza od 1, ponieważ

- jeśli $\bar{\lambda}_C > 1$, to $(I - C)^{-1}$ nie jest nieujemna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C = 1$, to $I - C$ nie jest odwracalna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C < 1$, to $(I - C)^{-1}$ istnieje i jest nieujemna. Ponadto, jeśli $I - C$ jest dodatnia, to wektor v też jest dodatni.

W ostatnim przypadku, gdy $\bar{\lambda}_C < 1$, mówimy, że gospodarka jest wydajna. Odpowiada to przypadkowi, gdy mamy do czynienia z gospodarką otwartą.

Kolejne zastosowanie twierdzenia Frobeniusa-Perrona

Kluczowa jest dominująca wartość własna, oznaczmy ją przez $\bar{\lambda}_C$, która musi być mniejsza od 1, ponieważ

- jeśli $\bar{\lambda}_C > 1$, to $(I - C)^{-1}$ nie jest nieujemna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C = 1$, to $I - C$ nie jest odwracalna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C < 1$, to $(I - C)^{-1}$ istnieje i jest nieujemna. Ponadto, jeśli $I - C$ jest dodatnia, to wektor v też jest dodatni.

W ostatnim przypadku, gdy $\bar{\lambda}_C < 1$, mówimy, że gospodarka jest wydajna. Odpowiada to przypadkowi, gdy mamy do czynienia z gospodarką otwartą.

Kolejne zastosowanie twierdzenia Frobeniusa-Perrona

Kluczowa jest dominująca wartość własna, oznaczmy ją przez $\bar{\lambda}_C$, która musi być mniejsza od 1, ponieważ

- jeśli $\bar{\lambda}_C > 1$, to $(I - C)^{-1}$ nie jest nieujemna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C = 1$, to $I - C$ nie jest odwracalna,
- jeśli $\bar{\lambda}_C < 1$, to $(I - C)^{-1}$ istnieje i jest nieujemna. Ponadto, jeśli $I - C$ jest dodatnia, to wektor v też jest dodatni.

W ostatnim przypadku, gdy $\bar{\lambda}_C < 1$, mówimy, że gospodarka jest wydajna. Odpowiada to przypadkowi, gdy mamy do czynienia z gospodarką otwartą.

Model gospodarki zamkniętej, $\bar{\lambda}_C = 1$

Niech $\bar{\lambda}_C = 1$. W tym przypadku mamy do czynienia z tzw. modelem gospodarki zamkniętej – cała produkcja zostaje skonsumowana przez gałęzie gospodarki (firmy). Nic nie wychodzi poza układ, czyli $d = 0$, a równanie jakie otrzymujemy to

$$Cx = x$$

lub równoważnie

$$(I - C)x = 0.$$

Oczywiście macierz $I - C$ jest osobliwa. Ponadto macierz konsumpcji C jest macierzą Markowa.

Model gospodarki zamkniętej, $\bar{\lambda}_C = 1$

Niech $\bar{\lambda}_C = 1$. W tym przypadku mamy do czynienia z tzw. modelem gospodarki zamkniętej – cała produkcja zostaje skonsumowana przez gałęzie gospodarki (firmy). Nic nie wychodzi poza układ, czyli $d = 0$, a równanie jakie otrzymujemy to

$$Cx = x$$

lub równoważnie

$$(I - C)x = 0.$$

Oczywiście macierz $I - C$ jest osobliwa. Ponadto macierz konsumpcji C jest macierzą Markowa.

Model gospodarki zamkniętej, $\bar{\lambda}_C = 1$

Niech $\bar{\lambda}_C = 1$. W tym przypadku mamy do czynienia z tzw. modelem gospodarki zamkniętej – cała produkcja zostaje skonsumowana przez gałęzie gospodarki (firmy). Nic nie wychodzi poza układ, czyli $d = 0$, a równanie jakie otrzymujemy to

$$Cx = x$$

lub równoważnie

$$(I - C)x = 0.$$

Oczywiście macierz $I - C$ jest osobliwa. Ponadto macierz konsumpcji C jest macierzą Markowa.

Model gospodarki zamkniętej, $\bar{\lambda}_C = 1$

Niech $\bar{\lambda}_C = 1$. W tym przypadku mamy do czynienia z tzw. modelem gospodarki zamkniętej – cała produkcja zostaje skonsumowana przez gałęzie gospodarki (firmy). Nic nie wychodzi poza układ, czyli $d = 0$, a równanie jakie otrzymujemy to

$$Cx = x$$

lub równoważnie

$$(I - C)x = 0.$$

Oczywiście macierz $I - C$ jest osobliwa. Ponadto macierz konsumpcji C jest macierzą Markowa.

Model gospodarki zamkniętej, $\bar{\lambda}_C = 1$

Niech $\bar{\lambda}_C = 1$. W tym przypadku mamy do czynienia z tzw. modelem gospodarki zamkniętej – cała produkcja zostaje skonsumowana przez gałęzie gospodarki (firmy). Nic nie wychodzi poza układ, czyli $d = 0$, a równanie jakie otrzymujemy to

$$Cx = x$$

lub równoważnie

$$(I - C)x = 0.$$

Oczywiście macierz $I - C$ jest osobliwa. Ponadto macierz konsumpcji C jest macierzą Markowa.

Dynamika
Równania różnicowe. Macierze Markowa. Definicje i własności
Modelowanie migracji

Model przepływów międzygałęziowych (model Leontiewa)
Model Leontiewa – wersja elementarna
Model Leontiewa z nieco szerszej perspektywy
Dynamika cen w zamkniętym modelu gospodarki

Algebraiczna metoda najmniejszych kwadratów

Dynamika cen w zamkniętym modelu Leontiewa

Załóżmy, że myślimy o wartości każdej produkcji (a nie o liczbie jednostek produkowanych przez gałąź). Wektor x reprezentuje zatem ceny produktów. Załóżmy, że $u_0 = x$ jest wektorem cen. Wtedy

$$Cu_0 \text{ podaje wartość każdego z produktów,}$$

czyli nowy wektor cen, ozn. $u_1 = Cu_0$.
W kolejnym kroku mamy $Cu_1 = C^2u_0$ itd. Otrzymujemy równanie różnicowe

$$u_k = C^k u_0.$$

Dynamika cen w zamkniętym modelu Leontiewa

Załóżmy, że myślimy o wartości każdej produkcji (a nie o liczbie jednostek produkowanych przez gałąź). Wektor x reprezentuje zatem ceny produktów. Załóżmy, że $u_0 = x$ jest wektorem cen. Wtedy

$$Cu_0 \text{ podaje wartość każdego z produktów,}$$

czyli nowy wektor cen, ozn. $u_1 = Cu_0$.
W kolejnym kroku mamy $Cu_1 = C^2u_0$ itd. Otrzymujemy równanie różnicowe

$$u_k = C^k u_0.$$

Dynamika cen w zamkniętym modelu Leontiewa

Załóżmy, że myślimy o wartości każdej produkcji (a nie o liczbie jednostek produkowanych przez gałąź). Wektor x reprezentuje zatem ceny produktów. Załóżmy, że $u_0 = x$ jest wektorem cen.
Wtedy

$$Cu_0 \text{ podaje wartość każdego z produktów,}$$

czyli nowy wektor cen, ozn. $u_1 = Cu_0$.
W kolejnym kroku mamy $Cu_1 = C^2u_0$ itd. Otrzymujemy równanie różnicowe

$$u_k = C^k u_0.$$

Dynamika cen w zamkniętym modelu Leontiewa

Załóżmy, że myślimy o wartości każdej produkcji (a nie o liczbie jednostek produkowanych przez gałąź). Wektor x reprezentuje zatem ceny produktów. Załóżmy, że $u_0 = x$ jest wektorem cen. Wtedy

$$Cu_0 \text{ podaje wartość każdego z produktów,}$$

czyli nowy wektor cen, ozn. $u_1 = Cu_0$.
W kolejnym kroku mamy $Cu_1 = C^2u_0$ itd. Otrzymujemy równanie różnicowe

$$u_k = C^k u_0.$$

Dynamika cen w zamkniętym modelu Leontiewa

Załóżmy, że myślimy o wartości każdej produkcji (a nie o liczbie jednostek produkowanych przez gałąź). Wektor x reprezentuje zatem ceny produktów. Załóżmy, że $u_0 = x$ jest wektorem cen. Wtedy

$$Cu_0 \text{ podaje wartość każdego z produktów,}$$

czyli nowy wektor cen, ozn. $u_1 = Cu_0$.
W kolejnym kroku mamy $Cu_1 = C^2u_0$ itd. Otrzymujemy równanie różnicowe

$$u_k = C^k u_0.$$

Dynamika cen w zamkniętym modelu Leontiewa

Załóżmy, że myślimy o wartości każdej produkcji (a nie o liczbie jednostek produkowanych przez gałąź). Wektor x reprezentuje zatem ceny produktów. Załóżmy, że $u_0 = x$ jest wektorem cen. Wtedy

$$Cu_0 \text{ podaje wartość każdego z produktów,}$$

czyli nowy wektor cen, ozn. $u_1 = Cu_0$.
W kolejnym kroku mamy $Cu_1 = C^2u_0$ itd. Otrzymujemy równanie różnicowe

$$u_k = C^k u_0.$$

Dynamika cen w zamkniętym modelu Leontiewa

Załóżmy, że myślimy o wartości każdej produkcji (a nie o liczbie jednostek produkowanych przez gałąź). Wektor x reprezentuje zatem ceny produktów. Załóżmy, że $u_0 = x$ jest wektorem cen. Wtedy

$$Cu_0 \text{ podaje wartość każdego z produktów,}$$

czyli nowy wektor cen, ozn. $u_1 = Cu_0$.
W kolejnym kroku mamy $Cu_1 = C^2 u_0$ itd. Otrzymujemy równanie różnicowe

$$u_k = C^k u_0.$$

Problem

Czy istnieje taki rozkład cen, na którym układ

$$u_k = C^k u_0.$$

się zatrzyma (stan równowagi) i czy ten układ zawsze będzie zmierzał do takiego rozkładu?

Rozwiązanie

Mamy do czynienia z macierzą Markowa dlatego też odpowiedź jest pozytywna: $\lambda = 1$ jest wartością własną macierzy konsumpcji C. Istnieje stan równowagi v^1 będący wektorem własnym związanym z tą wartością własną. Ponadto powtarzając transakcje jesteśmy zazwyczaj w stanie zbliżyć się do tego stanu, co gwarantuje nam, dla macierzy dodatnich, twierdzenie Frobeniusa-Perrona.

Problem

Czy istnieje taki rozkład cen, na którym układ

$$u_k = C^k u_0.$$

się zatrzyma (stan równowagi) i czy ten układ zawsze będzie zmierzał do takiego rozkładu?

Rozwiązanie

Mamy do czynienia z macierzą Markowa dlatego też odpowiedź jest pozytywna: $\lambda = 1$ jest wartością własną macierzy konsumpcji C. Istnieje stan równowagi v^1 będący wektorem własnym związanym z tą wartością własną. Ponadto powtarzając transakcje jesteśmy zazwyczaj w stanie zbliżyć się do tego stanu, co gwarantuje nam, dla macierzy dodatnich, twierdzenie Frobeniusa-Perrona.

Przykład

Niech $u_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,5 \\ 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}$$

oraz

$$u_k = C^k u_0.$$

Wtedy

$$\lambda_1 = 1; \quad v^1 = c \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}, c \neq 0$$

$$\lambda_2 = 0,2; \quad v^2 = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, c \neq 0.$$

Przykład

Niech $u_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,5 \\ 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}$$

oraz

$$u_k = C^k u_0.$$

Wtedy

$$\lambda_1 = 1; \quad v^1 = c \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}, c \neq 0$$

$$\lambda_2 = 0,2; \quad v^2 = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, c \neq 0.$$

$$C = PD_\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 1 \\ \frac{5}{8} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} u_k &= C^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 1 \\ \frac{5}{8} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= (x_1 + x_2) \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} + \left(\frac{5}{8} x_1 - \frac{3}{8} x_2 \right) 0,2^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Znowu punkt równowagi istnieje. Wynosi $(x_1 + x_2) \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$.

$$C = PD_\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 1 \\ \frac{5}{8} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} u_k &= C^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 1 \\ \frac{5}{8} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= (x_1 + x_2) \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} + \left(\frac{5}{8} x_1 - \frac{3}{8} x_2 \right) 0,2^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Znowu punkt równowagi istnieje. Wynosi $(x_1 + x_2) \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$.

$$C = PD_\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 1 \\ \frac{5}{8} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} u_k &= C^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 1 \\ \frac{5}{8} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= (x_1 + x_2) \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} + \left(\frac{5}{8} x_1 - \frac{3}{8} x_2 \right) 0,2^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Znowu punkt równowagi istnieje. Wynosi $(x_1 + x_2) \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$.

Dynamika

- Równania różnicowe. Macierze Markowa. Definicje i własności
- Modelowanie migracji

Model przepływów międzygałęziowych (model Leontiewa)

- Model Leontiewa – wersja elementarna
- Model Leontiewa z nieco szerszej perspektywy
- Dynamika cen w zamkniętym modelu gospodarki

Algebraiczna metoda najmniejszych kwadratów

Powiedzmy, że mamy jakieś dane empiryczne, znamy np.

- kurs akcji spółki na giełdzie
- dane ze stacji pomiarowej
- ...

i chcielibyśmy

- przewidzieć dalsze trendy
- dane, które posiadamy są niepełne, a chcieliśmy ustalić prawdopodobne wyniki wielkości, które mierzymy.
- chcielibyśmy zbadać korelacje pomiędzy zmiennymi

Niech y będzie odwzorowaniem liniowym (m) zmiennych $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ zadaną przez

$$y(x_1, \ldots, x_m) = c_1 x_1 + \ldots c_m x_m,$$

gdzie $c_1, \ldots, c_m$ są nieznanymi stałymi rzeczywistymi. Załóżmy, że $c_1, \ldots, c_m$ są otrzymywane w wyniku n eksperymentów (pomiarów), w których mierzone są $x_1, \ldots, x_m$ oraz y. Akceptujemy to, że rozwiązanie może być obciążone błędem, ale chcielibyśmy go zminimalizować.

Załóżmy, że k-ty eksperyment (pomiar) daje

$$x_{k1}, \dots, x_{km} \quad \text{oraz} \quad y_k.$$

Otrzymujemy zatem układ równań liniowych na $c_1, \dots, c_m$:

$$\begin{cases} x_{11}c_1 + x_{12}c_2 + \ldots + x_{1m}c_m = y_1, \\ \vdots \\ x_{n1}c_1 + x_{n2}c_2 + \ldots + x_{nm}c_m = y_n, \end{cases} \tag{11}$$

lub

$$Ac = y, \tag{12}$$

gdzie $A = (x_{ij}) \in M(n, m)$ jest macierzą współczynników układu, $c = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_m \end{bmatrix}$ jest wektorem niewiadomych, a $y = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}$.

Załóżmy, że k-ty eksperyment (pomiar) daje

$$x_{k1}, \ldots, x_{km} \text{ oraz } y_k.$$

Otrzymujemy zatem układ równań liniowych na $c_1, \ldots, c_m$:

$$\begin{cases} x_{11}c_1 + x_{12}c_2 + \ldots + x_{1m}c_m = y_1, \\ \vdots \\ x_{n1}c_1 + x_{n2}c_2 + \ldots + x_{nm}c_m = y_n, \end{cases} \tag{11}$$

lub

$$Ac = y, \tag{12}$$

gdzie $A = (x_{ij}) \in M(n, m)$ jest macierzą współczynników układu, $c = \begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_m \end{bmatrix}$ jest wektorem niewiadomych, a $y = \begin{bmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{bmatrix}$.

Załóżmy, że $n > m$. Ponieważ x_i oraz y mierzone są z błędami, oczekiwanie otrzymania dokładnego rozwiązania (11) lub (12) nie ma sensu. Naszym celem jest zatem wyznaczenie stałych $c_1, \ldots, c_m$, dla których lewe i prawe strony równań (11) są możliwie bliskie. Miarą bliskości będzie

$$d(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{k=1}^{m} (x_{k1}c_1 + \ldots + x_{km}c_m - y_k)^2 \qquad (13)$$

dla $k = 1, \ldots, n$. Stąd problem jaki należy rozwiązać to minimalizacja $d(c_1, \ldots, c_m)$.
Przeformułujmy nieco nasz problem. Zauważmy, że suma $x_{k1}c_1 + \ldots + x_{km}c_m$ jest k-tym komponentem wektora Ac w $\mathbb{R}^n$. Oznacza to, że

$$d(c_1, \ldots, c_m) = |Ac - y|^2.$$

Załóżmy, że $n > m$. Ponieważ x_i oraz y mierzone są z błędami, oczekiwanie otrzymania dokładnego rozwiązania (11) lub (12) nie ma sensu. Naszym celem jest zatem wyznaczenie stałych $c_1, \ldots, c_m$, dla których lewe i prawe strony równań (11) są możliwie bliskie. Miarą bliskości będzie

$$d(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{k=1}^{m} (x_{k1}c_1 + \ldots + x_{km}c_m - y_k)^2 \tag{13}$$

dla $k = 1, \ldots, n$. Stąd problem jaki należy rozwiązać to minimalizacja $d(c_1, \ldots, c_m)$.

Przeformułujmy nieco nasz problem. Zauważmy, że suma $x_{k1}c_1 + \ldots + x_{km}c_m$ jest k-tym komponentem wektora Ac w $\mathbb{R}^n$. Oznacza to, że

$$d(c_1, \ldots, c_m) = |Ac - y|^2.$$

Załóżmy, że $n > m$. Ponieważ x_i oraz y mierzone są z błędami, oczekiwanie otrzymania dokładnego rozwiązania (11) lub (12) nie ma sensu. Naszym celem jest zatem wyznaczenie stałych $c_1, \ldots, c_m$, dla których lewe i prawe strony równań (11) są możliwie bliskie. Miarą bliskości będzie

$$d(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{k=1}^{m} (x_{k1}c_1 + \ldots + x_{km}c_m - y_k)^2 \qquad (13)$$

dla $k = 1, \ldots, n$. Stąd problem jaki należy rozwiązać to minimalizacja $d(c_1, \ldots, c_m)$.

Przeformułujmy nieco nasz problem. Zauważmy, że suma $x_{k1}c_1 + \ldots + x_{km}c_m$ jest k-tym komponentem wektora Ac w $\mathbb{R}^n$. Oznacza to, że

$$d(c_1, \ldots, c_m) = |Ac - y|^2.$$

Rozpatrzmy kolumny macierzy A, tzn.
$k_i(A) = \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} & \dots & x_{ni} \end{bmatrix}^T$. Wtedy minimalizacja (13) jest równoważna znalezieniu $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, dla których odległość między y a

$$y_0 = Ac = c_1 k_1(A) + \ldots + c_m k_m(A)$$

jest najmniejsza.

Kluczowy układ równań

Aby rozwiązać problem wystarczy rozwiązać układ równań

$$\langle k_1(A), k_i(A)\rangle c_1 + \langle k_2(A), k_i(A)\rangle c_2 + \ldots + \langle k_m(A), k_i(A)\rangle c_m = \langle y, k_i(A)\rangle \tag{14}$$

dla $i = 1, \ldots, m$, gdzie

$$\langle y, k_i(A)\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j x_{ji}$$

oraz

$$\langle k_j(A), k_i(A)\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_{kj} x_{ki}.$$

Przykład 1.

Władze miejscowości Smogów rozpatrują ograniczenie liczby aut wjeżdżających do centrum tak aby nie przekroczona została norma stężenia pyłu PM10 wynosząca $50\mu g/m^3$. Bazują na pomiarach ilości pyłu PM10 w powietrzu ze stacji położonej w centrum miasta:

Liczba aut (w tys.)	Poziom PM10 (w $10\mu g/m^3$)
10	4
11	4
15	6
16	7

Chcemy wyznaczyć maksymalną liczbę aut, których dopuszczenie nie spowoduje przekroczenia norm.

Jest to problem przybliżenia za pomocą metody najmniejszych kwadratów prostej na płaszczyźnie. Mając dane pomiary $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ odpowiednio dla zmiennych x i y znajdujemy nachylenie c prostej p równaniu $y = cx$. Wiemy, że

$$\begin{cases} y_1 = cx_1, \\ \vdots \\ y_n = cx_n. \end{cases}$$

Używając (14) otrzymujemy

$$c = \frac{\langle X, Y \rangle}{\langle X, X \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Przykład 1.

Władze miejscowości Smogów rozpatrują ograniczenie liczby aut wjeżdżających do centrum tak aby nie przekroczona została norma stężenia pyłu PM10 wynosząca $50\mu g/m^3$. Bazują na pomiarach ilości pyłu PM10 w powietrzu ze stacji położonej w centrum miasta:

Liczba aut (w tys.)	Poziom PM10 (w $10\mu g/m^3$)
10	4
11	4
15	6
16	7

Chcemy wyznaczyć maksymalną liczbę aut, których dopuszczenie nie spowoduje przekroczenia norm.

Rozwiązanie

Mamy $X = (10, 11, 15, 16)$ oraz $Y = (4, 4, 6, 7)$. Zatem

$$c = \frac{\langle X, Y\rangle}{\langle X, X\rangle} = \frac{40 + 44 + 90 + 112}{100 + 121 + 225 + 256} = \frac{286}{702} = \frac{11}{27}.$$

Stąd $y = \frac{11}{27}x$. Pozostaje zatem rozwiązać równanie $\frac{11}{27}x = 5$. Mamy więc $x = \frac{135}{11} \approx 12272.72$. Ograniczenie, które na podstawie danych wprowadzi Smogów to 12272 auta.

Przykład 2.

Chcemy sprawdzić czy na poziom pyłu PM 10 ma wpływ liczba rowerzystów, gdy dane są następujące:

Liczba aut (w tys.)	Liczba rowerzystów (w tys.)	Poziom PM10 (w $10\mu g/m^3$)
10	8	4
11	10	4
15	4	6
16	4	7

Rozwiązanie

Mamy $A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 11 & 10 \\ 15 & 4 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$ i $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$. Z (14) otrzymujemy

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 10 & 11 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} 10 & 11 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} c_2 = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 10 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} 8 & 10 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} c_2 = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Przykład 2.

Chcemy sprawdzić czy na poziom pyłu PM 10 ma wpływ liczba rowerzystów, gdy dane są następujące:

Liczba aut (w tys.)	Liczba rowerzystów (w tys.)	Poziom PM10 (w $10\mu g/m^3$)
10	8	4
11	10	4
15	4	6
16	4	7

Rozwiązanie

Mamy $A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 11 & 10 \\ 15 & 4 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$ i $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$. Z (14) otrzymujemy

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 10 & 11 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} 10 & 11 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} c_2 = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 10 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} 8 & 10 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} c_2 = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Przykład 2.

Chcemy sprawdzić czy na poziom pyłu PM 10 ma wpływ liczba rowerzystów, gdy dane są następujące:

Liczba aut (w tys.)	Liczba rowerzystów (w tys.)	Poziom PM10 (w $10\mu g/m^3$)
10	8	4
11	10	4
15	4	6
16	4	7

Rozwiązanie

Mamy $A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 11 & 10 \\ 15 & 4 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$ i $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$. Z (14) otrzymujemy

$$\begin{cases} (100+121+225+256)c_1 + (80+110+60+64)c_2 = 40+44+90+112 \\ (80+110+60+64)c_1 + (64+100+32)c_2 = 32+40+24+28 \end{cases}$$

Przykład 2.

Chcemy sprawdzić czy na poziom pyłu PM 10 ma wpływ liczba rowerzystów, gdy dane są następujące:

Liczba aut (w tys.)	Liczba rowerzystów (w tys.)	Poziom PM10 (w $10\mu g/m^3$)
10	8	4
11	10	4
15	4	6
16	4	7

Rozwiązanie

Mamy $A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 11 & 10 \\ 15 & 4 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$ i $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$. Z (14) otrzymujemy

$$\begin{cases} 702c_1 + 314c_2 = 286 \\ 314c_1 + 196c_2 = 124 \end{cases}$$

Przykład 2.

Chcemy sprawdzić czy na poziom pyłu PM 10 ma wpływ liczba rowerzystów, gdy dane są następujące:

Liczba aut (w tys.)	Liczba rowerzystów (w tys.)	Poziom PM10 (w $10\mu g/m^3$)
10	8	4
11	10	4
15	4	6
16	4	7

Rozwiązanie

Mamy $A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 11 & 10 \\ 15 & 4 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$ i $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$. Z (14) otrzymujemy

$$\begin{cases} 702c_1 + 314c_2 = 286 \\ 314c_1 + 196c_2 = 124 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{4280}{9749} \approx 0,439 \\ c_2 = -\frac{689}{9749} \approx -0,07 \end{cases}$$

Ostatecznie

$$y(x_1, x_2) = \frac{4280}{9749}x_1 - \frac{689}{9749}x_2.$$

Przykład 2.

Chcemy sprawdzić czy na poziom pyłu PM 10 ma wpływ liczba rowerzystów, gdy dane są następujące:

Liczba aut (w tys.)	Liczba rowerzystów (w tys.)	Poziom PM10 (w $10\mu g/m^3$)
10	8	4
11	10	4
15	4	6
16	4	7

Rozwiązanie

Mamy $A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 11 & 10 \\ 15 & 4 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$ i $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$. Z (14) otrzymujemy

$$\begin{cases} 702c_1 + 314c_2 = 286 \\ 314c_1 + 196c_2 = 124 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{4280}{9749} \approx 0,439 \\ c_2 = -\frac{689}{9749} \approx -0,07 \end{cases}$$

Ostatecznie

$$y(x_1, x_2) = \frac{4280}{9749}x_1 - \frac{689}{9749}x_2.$$