Grupa I

2. (200 pkt) Niech odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, będzie dane wzorem $T(x, y) = (x + 3y, 2x - 3y)$, zaś złożenie odwzorowań $S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem $S \circ T(x, y) = (5x - 3y, -8x + 12y, -x - 12y)$.

a) Zbadać, czy T jest izomorfizmem.

b) Za pomocą rachunku macierzowego wyznaczyć dziedzinę, przeciwdziedzinę i wzór odwzorowania S.

3. (200 pkt) Wiemy, że T jest odwzorowaniem obrotu płaszczyzny o kąt $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Wiemy, że $M_T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania T i że $m_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Wyznaczyć macierz M_T i kąt φ.

b) Wyznaczyć wzór odwzorowania S takiego, że $S \circ T$ jest macierzą obrotu o kąt $\frac{5\pi}{3}$.

4. (300 pkt) Obliczyć wartości i wektory własne dla macierzy:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz ta jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnić.

5. (300 pkt) Poniższą macierz symetryczną A przedstawić w postaci $A = PD_\Lambda P^T$, gdzie P jest macierzą ortogonalną, a D_Λ jest postacią diagonalną macierzy A. Następnie obliczyć A^6 (w rozwiązaniu mogą się pojawić liczby typu x^6 - nie trzeba wykonywać potęgowania, jednak proszę o wykonanie wszystkich pozostałych mnożeń).

$$A = \begin{bmatrix} -0,46 & -0,72 \\ \\ -0,72 & -0,04 \end{bmatrix}$$

.

6. (250 pkt) Dwa sklepy: A i B mają dominującą pozycję na rynku sprzedaży wihajstrów. Wihajstry te kupuje w każdym miesiącu grupa 440 klientów, którzy używają je do produkcji ustrojstw. Co miesiąc, średnio $\frac{1}{3}$ klientów, którzy w poprzednim miesiącu kupowali wihajstry w sklepie A, kupuje teraz w sklepie B. Jednocześnie, średnio $\frac{2}{5}$ klientów, którzy w poprzednim miesiącu kupowali wihajstry w sklepie B, kupuje teraz w sklepie A. Pozostali kupują w tym samym sklepie co wcześniej. Sformułować układ równań dynamiki związanej z tym problemem, wyznaczyć jego macierz przejścia i stan równowagi. Czy macierz przejścia w tym układzie jest macierzą Markowa? Czy stan równowagi tego układu jest jego stanem granicznym? Odpowiedź uzasadnić.

7. (200 pkt) Wyznaczyć macierz i zbadać określoność formy kwadratowej zadanej wzorem: $f(x, y, z) = -x^2 + 3xy - 4y^2 - 2yz - 5z^2$.

8. (150 pkt) Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, a B jest macierzą symetryczną o wymiarach 3×3, współczynnikach rzeczywistych i wartościach własnych -3, -2 i 4. Odpowiedzieć na poniższe pytania bez uzasadniania. Jeśli podane informacje umożliwiają kilka odpowiedzi na zadane pytanie, podać wszystkie możliwe wyniki. Jeśli podane informacje nie są wystarczające, by zbiór odpowiedzi zawęzić do 2 lub mniej elementów, należy to napisać.

a) Jaka jest określoność formy kwadratowej, której macierzą jest $B + 5I$?

b) Jaka jest suma wartości własnych macierzy $A + 2B^T$?

c) Ile wynosi iloczyn wartości własnych macierzy $3AB^{-1}$?

d) Ile wynosi suma wartości własnych macierzy $(B^T B)^2$?

Powodzenia!

Grzesiek Kosiorowski

Grupa J

2. (200 pkt) Niech odwzorowanie liniowe $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, będzie dane wzorem $S(x,y) = (2x - y, x + 4y)$, zaś złożenie odwzorowań $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem $S \circ T(x,y,z) = (-x - 5y + z, 13x + 2y - 4z)$.

a) Zbadać, czy S jest izomorfizmem.

b) Za pomocą rachunku macierzowego wyznaczyć dziedzinę, przeciwdziedzinę i wzór odwzorowania T.

3. (200 pkt) Wiemy, że T jest odwzorowaniem obrotu płaszczyzny o kąt $\varphi \in (0, \pi)$. Wiemy, że $M_T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania T i że $m_{11} = -\frac{1}{2}$.

a) Wyznaczyć macierz M_T i kąt φ.

b) Wyznaczyć wzór odwzorowania S takiego, że $S \circ T$ jest macierzą obrotu o kąt $\frac{\pi}{6}$.

4. (300 pkt) Obliczyć wartości i wektory własne dla macierzy:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz ta jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnić.

5. (300 pkt) Poniższą macierz symetryczną A przedstawić w postaci $A = PD_\Lambda P^T$, gdzie P jest macierzą ortogonalną, a D_Λ jest postacią diagonalną macierzy A. Następnie obliczyć A^7 (w rozwiązaniu mogą się pojawić liczby typu x^7 - nie trzeba wykonywać potęgowania, jednak proszę o wykonanie wszystkich pozostałych mnożeń).

$$A = \begin{bmatrix} 0,92 & -1,44 \\ \\ -1,44 & 0,08 \end{bmatrix}$$

.

6. (250 pkt) Obywatele Republiki Algebraicznej w liczbie 740 tysięcy co roku jeżdżą na wakacje w góry lub nad morze. W każdym roku $\frac{3}{4}$ osób, które w poprzednim roku jechało w góry, tym razem jedzie nad morze. Jednocześnie $\frac{4}{7}$ osób, które w poprzednim roku były nad morzem, jedzie w kolejnym w góry. Sformułować układ równań dynamiki związanej z tym problemem, wyznaczyć jego macierz przejścia i stan równowagi. Czy macierz przejścia w tym układzie jest macierzą Markowa? Czy stan równowagi tego układu jest jego stanem granicznym? Odpowiedź uzasadnić.

7. (200 pkt) Wyznaczyć macierz i zbadać określoność formy kwadratowej zadanej wzorem: $f(x,y,z) = -2x^2 + 2xy - 3y^2 - 5xz - 4z^2$.

8. (150 pkt) Macierz $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, a B jest macierzą symetryczną o wymiarach 3×3, współczynnikach rzeczywistych i wartościach własnych 1, 4 i 6. Odpowiedzieć na poniższe pytania bez uzasadniania. Jeśli podane informacje umożliwiają kilka odpowiedzi na zadane pytanie, podać wszystkie możliwe wyniki. Jeśli podane informacje nie są wystarczające, by zbiór odpowiedzi zawęzić do 2 lub mniej elementów, należy to napisać.

a) Jaka jest określoność formy kwadratowej, której macierzą jest $B - 6I$?

b) Jaka jest suma wartości własnych macierzy $A^T + 2B$?

c) Ile wynosi iloczyn wartości własnych macierzy $2AB^{-1}$?

d) Ile wynosi suma wartości własnych macierzy $B^T B$?

Powodzenia!
Grzesiek Kosiorowski