

Grupa E

1. (300 pkt) Rozwiązać metodą Gaussa-Jordana układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + w = 2 \\ -2x + z - 2w = 1 \\ x + 6y + z - 5w = 10 \end{cases} .$$

2. (300 pkt) Wyznaczyć za pomocą twierdzenia Kroneckera-Capellego (bez rozwiązywania), ile (w zależności od parametru k) rozwiązań ma poniższy układ równań liniowych zmiennych x, y :

$$\begin{cases} (k + 2)x - y = -2 \\ 5x + (k - 4)y = 7k - 3 \end{cases} .$$

3. (250 pkt) Obliczyć wyznacznik i ślad macierzy: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. (400 pkt) Używając macierzy odwrotnej, rozwiązać równania macierzowe ze względu na zmienną X (I jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru):

$$3 \left(2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \right)^T = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 16 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + I \right).$$

5. (250 pkt) Czy poniższy układ wektorów jest liniowo niezależny? Jeśli nie, co najwyżej ile z nich może być liniowo niezależnych?

$$\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, -1), (-2, 3, 1, 5), (2, 1, 3, -1)\}.$$

6. (100 pkt)

a) Macierz A jest wymiaru 5×5 , a jej rząd jest równy 4. Trzeci wiersz macierzy A składa się z samych zer, za wyjątkiem elementu $a_{32} = -2$. Niech macierz A^* będzie macierzą powstałą przez usunięcie z macierzy A trzeciego wiersza i drugiej kolumny, a następnie zamienienie miejscami pierwszej i drugiej kolumny. Jaki jest rząd macierzy $(-3)(A^*)^T$?

b) Macierze B i C są macierzami wymiaru 4×4 . $\det B = 2$, $\det C = \frac{1}{3}$. Ile wynosi $\det [2(BC)^{-1}]$?

Uwaga! Jeśli możliwa jest więcej niż jedna poprawna odpowiedź na któreś z pytań w tym zadaniu, proszę to również napisać!

Powodzenia!

Grzesiek Kosiorowski

Grupa F

1. (300 pkt) Rozwiązać metodą Gaussa-Jordana układ równań liniowych:

$$\begin{cases} -y + 2z + 3w = 2 \\ 3x + 2y - z - 4w = -1 \\ 6x + y + 4z + w = 4 \end{cases} .$$

2. (300 pkt) Wyznaczyć za pomocą twierdzenia Kroneckera-Capellego (bez rozwiązywania), ile (w zależności od parametru k) rozwiązań ma poniższy układ równań liniowych zmiennych x, y :

$$\begin{cases} 3x + (k - 1)y = 2k - 2 \\ (5 - k)x + y = 2 \end{cases} .$$

3. (250 pkt) Obliczyć wyznacznik i ślad macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

4. (400 pkt) Używając macierzy odwrotnej, rozwiązać równania macierzowe ze względu na zmienną X (I jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru):

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{3}X \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 3I \right) \right)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} .$$

5. (250 pkt) Czy poniższy układ wektorów jest liniowo niezależny? Jeśli nie, co najwyżej ile z nich może być liniowo niezależnych?

$$\{(0, -1, 1, -1), (-1, 1, 0, 2), (-2, 3, -1, 5), (-1, 0, 1, 1)\} .$$

6. (100 pkt)

a) Macierz A jest wymiaru 4×4 i jej wyznacznik wynosi 6. Ponadto, trzecia kolumna macierzy A składa się z samych zer, za wyjątkiem $a_{43} = 3$. Niech macierz A^* będzie macierzą powstałą przez usunięcie z macierzy A czwartego wiersza i trzeciej kolumny. Jaki jest rząd macierzy $2(A^*)^T$?

b) Macierze B i C są macierzami wymiaru 5×5 . $\det B = 3$, $\det C = \frac{1}{2}$. Ile wynosi $\det [(-3)(BC^T)^{-1}]$?

Uwaga! Jeśli możliwa jest więcej niż jedna poprawna odpowiedź na któreś z pytań w tym zadaniu, proszę to również napisać!

Powodzenia!

Grzesiek Kosiorowski