Wstęp: logika, teoria mnogości, wektory

Zadania na ćwiczenia:
I. Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami posługując się tabelami logicznymi.
a) $[\sim (p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$ (prawo de Morgana zaprzeczenia koniunkcji)
b) $[(p \vee q) \Rightarrow (p \vee (\sim q))] \Rightarrow [(\sim p) \vee q]$.
II. Zapisać symbolicznie poniższe zdania logiczne i rozstrzygnąć, czy są prawdziwe zawsze, nigdy, czy w szczególnych okolicznościach. Następnie zapisać symbolicznie i pełnym zdaniem ich zaprzeczenia:
a) Jeżeli z faktu, że nieprawdą jest, że czosnek szkodzi wampirom, wynika, że szkodzi im cebula, to wampirom szkodzi czosnek i cebula.
b) Dla każdej liczby rzeczywistej x, istnieje liczba całkowita z, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi: x-n<z lub x+n<z.
III. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ narysować zbiór $X \times Y$, gdzie:
a) $X = (-1, 1) \cup (2, 4] \setminus (0, 3]$; $Y = [-3, 2) \cap \mathbb{Z}$.
IV. Sprawdzić ortogonalność (prostopadłość) poniższych wektorów w $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Jeśli nie są prostopadłe, obliczyć kąty między nimi (a przynajmniej podać kosinus takiego kąta i powiedzieć, czy kąt jest ostry czy rozwarty).
c) $(-1, 3, 2)$, $(-2, 1, -2)$, $(-1, -3, 4)$.
V. W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są wektory: $x = (1, 2, 0, 3)$ i $y = (2, 3, -1, 0)$. Dobrać $a$ i $b$ tak, by wektor $z = (0, 0, 1, 1) + ax + by$ był ortogonalny (prostopadły) do $x$ i do $y$.

---

Zadania domowe:
Do przypomnienia: materiał szkoły średniej.
**Zadanie 1.** Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami posługując się tabelami logicznymi.
a) $[\sim (p \vee q)] \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$ (prawo de Morgana zaprzeczenia alternatywy)
b) $[(\sim p) \Rightarrow q] \Rightarrow [p \vee q]$
c) $[p \vee q] \Leftrightarrow [\sim p \Rightarrow q]$
d) $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$
e) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(p \vee q) \Rightarrow \sim r] \Rightarrow (p \vee q \vee r)$
f) $[(\sim p) \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow p]$
g) $\{[p \vee q] \Rightarrow [(\sim r) \wedge r]\} \Rightarrow [(\sim q) \vee (\sim p)]$
h) $\{[p \vee q] \wedge [(\sim q) \vee r]\} \Rightarrow [p \vee r]$.
**Zadanie 2.** Zanegować następujące zdania (bez użycia symbolu $(\sim)$):
a) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}} \forall_{\epsilon>0} [(x + y > \epsilon) \wedge (\epsilon = y)]$
b) $\exists_{x\in\mathbb{R}} \forall_{y\in\mathbb{R}} [x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x + y < 2 \vee x = 0)]$.
c) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in(0,1)} \forall_{z\in\mathbb{Z}} [x^2 > y \Leftrightarrow (x = z \wedge x + y \leq z^3)]$.
d) $\exists_{x\in\{0,1,2,7\}} \forall_{y\in[-1,2]} \exists_{z\in\mathbb{Z}} [x + y^2 = z^3 \Rightarrow (x - y < z \Rightarrow x + z \geq y)]$.
**Zadanie 3.** Zapisać symbolicznie poniższe zdania logiczne i rozstrzygnąć za pomocą tabelki logicznej, czy są prawdziwe zawsze, nigdy, czy w szczególnych okolicznościach. Następnie zapisać symbolicznie i pełnym zdaniem ich zaprzeczenia:
a) Jeśli z faktu, że do Paryża jedzie się przez Moskwę wynika, że do Paryża nie jedzie się przez Moskwę, to do Paryża nie jedzie się przez Moskwę.
b) Są dwie możliwości: deszcz pada i ulica jest w remoncie lub też z tego, że ulica jest w remoncie wynika, że nie pada deszcz.
c) Archibald ma brodę lub wąsy wtedy i tylko wtedy, gdy jeżeli nie ma wąsów, to ma brodę.

d) Jeżeli Eufrozyna nie zna logiki, to jeżeli Eufrozyna zna logikę, to Eufrozyna urodziła się sto lat temu.
e) Każdy smerf boi się Gargamela lub Klakiera wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje smerf, który nie boi się Gargamela i nie boi się Klakiera.

**Zadanie 4.** Zapisać symbolicznie poniższe zdania logiczne i rozstrzygnąć, czy są prawdziwe zawsze, nigdy, czy w szczególnych okolicznościach. Następnie zapisać symbolicznie i pełnym zdaniem ich zaprzeczenia:
a) Jeśli dla każdego Romea istnieje Julia, w której się może zakochać, to istnieje Julia, w której się może zakochać każdy Romeo.
b) Jeśli istnieje Julia, w której może się zakochać każdy Romeo, to dla każdego Romea istnieje Julia, w której może się zakochać.

**Zadanie 5.** Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ oraz $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Znaleźć zbiory:
a) $A \cup B$; b) $B \cap C$; c) $A \setminus B$; d) $A \times B$; e) $(C \setminus B) \times A$; f) $(A \times A) \setminus (B \times B)$

**Zadanie 6.** Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ narysować zbiory $X \times Y$, gdzie:
a) $X = \mathbb{R} \setminus (-3, 3)$ $Y = [1, 2) \cup (3, 5]$ ; b) $X = (\mathbb{R} \setminus (-3, 3))^c$, $Y = \mathbb{Z} \cap (-5, 2)$; c) $X = \mathbb{N}$, $Y = \{-1, 2, \frac{7}{2}\}$; d) $X = (1, 2) \cup (3, 4)$, $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
e) $X = (1, 3] \cup [5, 6), Y = \{y \in \mathbb{R} : \ln y \leq 1\}$,
f) $X = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x-1} \geq 1\}, Y = \{y \in [0, 2\pi] : \sin y > \frac{1}{2}\}$.

**Zadanie 7.** Sprawdzić, czy kanoniczny iloczyn skalarny $< \cdot, \cdot >$ w $\mathbb{R}^2$ spełnia własności:
a) $< x, y >=< y, x >$ dla dowolnych wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$.
b) $< ax, y >= a < x, y >$ dla dowolnych wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$ i liczby $a \in \mathbb{R}$.
c) $< (x + y), z >=< x, z > + < y, z >$ dla dowolnych wektorów $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.
d) $< x, x >\geq 0$ dla dowolnego wektora $x \in \mathbb{R}^n$. Ponadto, $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$.

**Zadanie 8.** Sprawdzić ortogonalność (prostopadłość) poniższych wektorów w $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Jeśli nie są prostopadłe, obliczyć kąty między nimi (a przynajmniej podać kosinus takiego kąta i powiedzieć, czy kąt jest ostry czy rozwarty).
a) $(4, -3)$, $(3 + 4\sqrt{3}, 4 - 3\sqrt{3})$;
b) $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 4)$, $(6, 5, -1)$;
c) $(1, -1, 0)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 5, -4)$;
d) $(3, 1, -1)$, $(-1, 4, 2)$, $(-6, -2, 2)$;
e) $(2, 1, 1, 1)$, $(0, -3, 2, 1)$, $(3, -2, -2, -2)$, $(0, -1, -4, 5)$;
f) $(0, 1, 2, -1)$, $(4, 1, 0, 1)$, $(-1, 3, -1, 1)$, $(1, 1, 1, -1)$.

**Zadanie 9.** W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są wektory: $x = (0, -1, 1, 2)$ i $y = (3, 1, 2, 1)$. Dobrać $a$ i $b$ tak, by wektor $z = (a, b, -1, 2)$ był ortogonalny (prostopadły) do $x$ i do $y$.