11a. Funkcje wielu zmiennych - gradient, pochodna kierunkowa i prawo Gossena

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

1. „Monotoniczność”
2. Gradient
3. Pochodna kierunkowa
4. Prawo Gossena dla funkcji wielu zmiennych

Wstępne założenia

Jak w poprzednich rozdziałach, badamy funkcję $f : \mathbb{R}^n \supset D_f \to \mathbb{R}$ zmiennych $(x_1, \ldots, x_n)$. Zakładamy o niej, że jest dwukrotnie różniczkowalna (chyba, że jest napisane inaczej).

Wstępne założenia

Jak w poprzednich rozdziałach, badamy funkcję $f : \mathbb{R}^n \supset D_f \to \mathbb{R}$ zmiennych $(x_1, \ldots, x_n)$. Zakładamy o niej, że jest dwukrotnie różniczkowalna (chyba, że jest napisane inaczej).
Tak jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, samo otrzymanie wzoru funkcji wielu zmiennych jako odpowiedzi na pytanie o związek pomiędzy jakimiś wielkościami (np. ekonomicznymi) nie zawsze daje od razu odpowiedzi na wszystkie pytania.

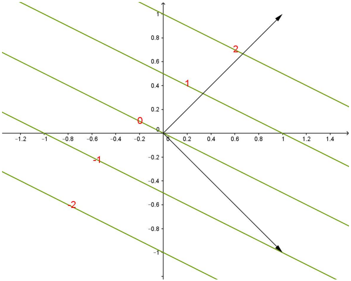
Wstępne założenia

Jak w poprzednich rozdziałach, badamy funkcję $f : \mathbb{R}^n \supset D_f \to \mathbb{R}$ zmiennych $(x_1, \dots, x_n)$. Zakładamy o niej, że jest dwukrotnie różniczkowalna (chyba, że jest napisane inaczej).
Tak jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, samo otrzymanie wzoru funkcji wielu zmiennych jako odpowiedzi na pytanie o związek pomiędzy jakimiś wielkościami (np. ekonomicznymi) nie zawsze daje od razu odpowiedzi na wszystkie pytania. W przypadku jednej zmiennej, ważne było badanie monotoniczności funkcji - pozwalało ono odpowiedznieć na pytania typu: czy ceny akcji w danym okresie czasu rosły, czy malały? czy przychód firmy pod wpływem zmian cen rósł, czy malał?

Wstępne założenia

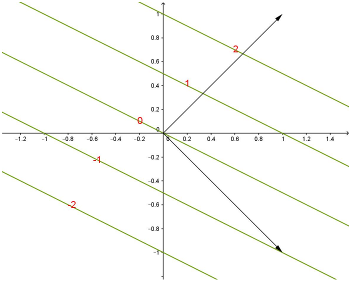
Jak w poprzednich rozdziałach, badamy funkcję $f : \mathbb{R}^n \supset D_f \to \mathbb{R}$ zmiennych $(x_1, \ldots, x_n)$. Zakładamy o niej, że jest dwukrotnie różniczkowalna (chyba, że jest napisane inaczej).
Tak jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, samo otrzymanie wzoru funkcji wielu zmiennych jako odpowiedzi na pytanie o związek pomiędzy jakimiś wielkościami (np. ekonomicznymi) nie zawsze daje od razu odpowiedzi na wszystkie pytania. W przypadku jednej zmiennej, ważne było badanie monotoniczności funkcji - pozwalało ono odpowiedznieć na pytania typu: czy ceny akcji w danym okresie czasu rosły, czy malały? czy przychód firmy pod wpływem zmian cen rósł, czy malał?
W wypadku funkcji dwóch zmiennych pytanie o monotoniczność jest bardziej skomplikowane, co wykaże przykład na następnym slajdzie.

„Monotoniczność" - przykład



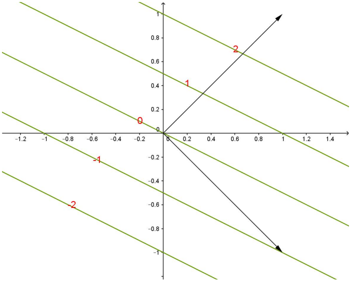
Wykres przedstawia poziomice (zielone) funkcji $f(x, y) = x + 2y$ w okolicy punktu $(0, 0)$.

„Monotoniczność" - przykład



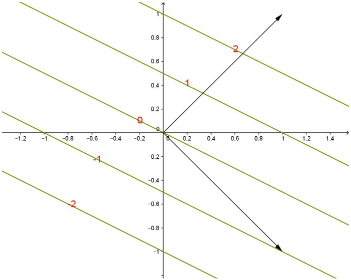
Wykres przedstawia poziomice (zielone) funkcji $f(x,y) = x + 2y$ w okolicy punktu $(0,0)$. Nasza intuicja z funkcji jednej zmiennej mówi - jeśli wartości funkcji rosną, gdy „przesuwamy się w prawo" to funkcja jest rosnąca.

„Monotoniczność" - przykład

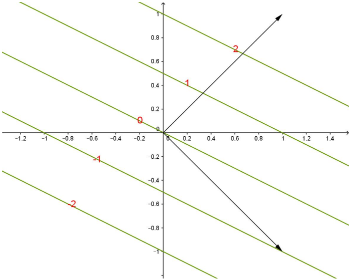


Wykres przedstawia poziomice (zielone) funkcji $f(x, y) = x + 2y$ w okolicy punktu $(0, 0)$. Nasza intuicja z funkcji jednej zmiennej mówi - jeśli wartości funkcji rosną, gdy „przesuwamy się w prawo" to funkcja jest rosnąca. Ale w tej sytuacji - jeśli na płaszczyźnie Oxy „przesuwamy się w prawo i w górę z tą samą prędkością" (tj. wzdłuż wektora $(1, 1)$) wartości funkcji rosną.

„Monotoniczność” - przykład



„Monotoniczność” - przykład



A jeśli „przesuwamy się w prawo i w dół z tą samą prędkością” (tj. wzdłuż wektora $(1, -1)$) wartości funkcji maleją. Zatem nie możemy powiedzieć, że rozważana funkcja jest ogólnie rosnąca lub malejąca w pobliżu $(0, 0)$ - a na pewno już nie jest ona stała.

„Monotoniczność” - zmiana celu

Skoro nie możemy o funkcji wielu zmiennych powiedzieć ogólnie, czy jest rosnąca, czy malejąca, musimy zmienić pytanie, które zadajemy.

„Monotoniczność" - zmiana celu

Skoro nie możemy o funkcji wielu zmiennych powiedzieć ogólnie, czy jest rosnąca, czy malejąca, musimy zmienić pytanie, które zadajemy. W tej prezentacji zajmiemy się odpowiedzią na dwa tego typu pytania. Po pierwsze, wzdłuż jakiego wektora przyrost funkcji jest najszybszy? Takie pytanie może pojawić się w zagadnieniu typu: jak rozdzielić dodatkowe zasoby między środki produkcji, aby najbardziej zwiększyć wielkość tej produkcji?

„Monotoniczność" - zmiana celu

Skoro nie możemy o funkcji wielu zmiennych powiedzieć ogólnie, czy jest rosnąca, czy malejąca, musimy zmienić pytanie, które zadajemy. W tej prezentacji zajmiemy się odpowiedzią na dwa tego typu pytania. Po pierwsze, wzdłuż jakiego wektora przyrost funkcji jest najszybszy? Takie pytanie może pojawić się w zagadnieniu typu: jak rozdzielić dodatkowe zasoby między środki produkcji, aby najbardziej zwiększyć wielkość tej produkcji? Tutaj pomoże nam pojęcie **gradientu**.

„Monotoniczność” - zmiana celu

Skoro nie możemy o funkcji wielu zmiennych powiedzieć ogólnie, czy jest rosnąca, czy malejąca, musimy zmienić pytanie, które zadajemy. W tej prezentacji zajmiemy się odpowiedzią na dwa tego typu pytania. Po pierwsze, wzdłuż jakiego wektora przyrost funkcji jest najszybszy? Takie pytanie może pojawić się w zagadnieniu typu: jak rozdzielić dodatkowe zasoby między środki produkcji, aby najbardziej zwiększyć wielkość tej produkcji? Tutaj pomoże nam pojęcie **gradientu**.

„Monotoniczność" - zmiana celu

Możemy się naturalnie zastanawiać czy funkcja wielu zmiennych jest rosnąca lub malejąca wzdłuż pewnych prostych - tak jak przed chwilą analizowaliśmy, ustalając, ze w pobliżu $(0, 0)$ funkcja $f(x, y) = x + 2y$ rośnie w kierunku wektora $(1, 1)$, a maleje wzdłuż wektora $(1, -1)$. W ekonomii może się pojawić takie zagadnienie np. w rozważaniach, jak na wartość funkcji produkcji wpłynie dana zmiana alokacji zasobów w środki produkcji.

„Monotoniczność" - zmiana celu

Możemy się naturalnie zastanawiać czy funkcja wielu zmiennych jest rosnąca lub malejąca wzdłuż pewnych prostych - tak jak przed chwilą analizowaliśmy, ustalając, ze w pobliżu $(0,0)$ funkcja $f(x,y) = x + 2y$ rośnie w kierunku wektora $(1,1)$, a maleje wzdłuż wektora $(1,-1)$. W ekonomii może się pojawić takie zagadnienie np. w rozważaniach, jak na wartość funkcji produkcji wpłynie dana zmiana alokacji zasobów w środki produkcji. Narzędziem, którego użyjemy w takim wypadku jest **pochodna kierunkowa**.

Gradient - definicja i interpretacja

Gradient

Gradientem funkcji $f : \mathbb{R}^n \supset D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ zmiennych $(x_1, \ldots, x_n)$ w punkcie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ nazywamy wektor, którego współrzędnymi są pochodne cząstkowe funkcji f w tym punkcie. Zapisujemy:

$$\nabla_f(a) = \left(f'_{x_1}(a), f'_{x_2}(a), \ldots, f'_{x_n}(a)\right).$$

Dopuszczalną notacją jest też grad $f(a)$.

Gradient - definicja i interpretacja

Gradient

Gradientem funkcji $f : \mathbb{R}^n \supset D_f \to \mathbb{R}$ zmiennych $(x_1, \ldots, x_n)$ w punkcie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ nazywamy wektor, którego współrzędnymi są pochodne cząstkowe funkcji f w tym punkcie. Zapisujemy:

$$\nabla_f(a) = \left(f'_{x_1}(a), f'_{x_2}(a), \ldots, f'_{x_n}(a)\right).$$

Dopuszczalną notacją jest też grad $f(a)$.

Interpretacja: Gradient to wektor wskazujący, w którą stronę (dokładnie, wzdłuż jakiej półprostej) funkcja najszybciej rośnie (oczywiście - w przeciwną stronę będzie najszybciej maleć) w najbliższym otoczeniu punktu a. Długość gradientu odpowiada wzrostowi wartości tej funkcji na jednostkę długości.

Gradient - przykład zastosowania

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2, 1)$. W jakich proporcjach firma powinna zwiększać nakłady na te dwie dziedziny działalności, by jej zysk z tego zwiększenia nakładów był jak największy (przy założeniu, że wzrost nakładów będzie niewielki)?

Gradient - przykład zastosowania

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2, 1)$. W jakich proporcjach firma powinna zwiększać nakłady na te dwie dziedziny działalności, by jej zysk z tego zwiększenia nakładów był jak największy (przy założeniu, że wzrost nakładów będzie niewielki)?

Obliczamy:

$$f'_x(x, y) =$$

Gradient - przykład zastosowania

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2, 1)$. W jakich proporcjach firma powinna zwiększać nakłady na te dwie dziedziny działalności, by jej zysk z tego zwiększenia nakładów był jak największy (przy założeniu, że wzrost nakładów będzie niewielki)?

Obliczamy:

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5y}};$$

Gradient - przykład zastosowania

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2, 1)$. W jakich proporcjach firma powinna zwiększać nakłady na te dwie dziedziny działalności, by jej zysk z tego zwiększenia nakładów był jak największy (przy założeniu, że wzrost nakładów będzie niewielki)?

Obliczamy:

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5y}}; \quad f'_y(x, y) =$$

Gradient - przykład zastosowania

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2,1)$. W jakich proporcjach firma powinna zwiększać nakłady na te dwie dziedziny działalności, by jej zysk z tego zwiększenia nakładów był jak największy (przy założeniu, że wzrost nakładów będzie niewielki)?

Obliczamy:

$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5y}}; \quad f'_y(x,y) = \frac{5}{2\sqrt{x^2+5y}}.$$

$$f'_x(2,1) =$$

Gradient - przykład zastosowania

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2, 1)$. W jakich proporcjach firma powinna zwiększać nakłady na te dwie dziedziny działalności, by jej zysk z tego zwiększenia nakładów był jak największy (przy założeniu, że wzrost nakładów będzie niewielki)?

Obliczamy:

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5y}}; \quad f'_y(x, y) = \frac{5}{2\sqrt{x^2 + 5y}}.$$

$$f'_x(2, 1) = \frac{2}{3};$$

Gradient - przykład zastosowania

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2,1)$. W jakich proporcjach firma powinna zwiększać nakłady na te dwie dziedziny działalności, by jej zysk z tego zwiększenia nakładów był jak największy (przy założeniu, że wzrost nakładów będzie niewielki)?

Obliczamy:

$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5y}}; \quad f'_y(x,y) = \frac{5}{2\sqrt{x^2+5y}}.$$

$$f'_x(2,1) = \frac{2}{3}; \quad f'_y(2,1) =$$

Gradient - przykład zastosowania

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2, 1)$. W jakich proporcjach firma powinna zwiększać nakłady na te dwie dziedziny działalności, by jej zysk z tego zwiększenia nakładów był jak największy (przy założeniu, że wzrost nakładów będzie niewielki)?

Obliczamy:

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5y}}; \quad f'_y(x, y) = \frac{5}{2\sqrt{x^2 + 5y}}.$$

$$f'_x(2, 1) = \frac{2}{3}; \quad f'_y(2, 1) = \frac{5}{6}.$$

Gradient - przykład zastosowania

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2,1)$. W jakich proporcjach firma powinna zwiększać nakłady na te dwie dziedziny działalności, by jej zysk z tego zwiększenia nakładów był jak największy (przy założeniu, że wzrost nakładów będzie niewielki)?

Gradient - przykład zastosowania

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2, 1)$. W jakich proporcjach firma powinna zwiększać nakłady na te dwie dziedziny działalności, by jej zysk z tego zwiększenia nakładów był jak największy (przy założeniu, że wzrost nakładów będzie niewielki)?

Zatem:

$$\nabla_f(2, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right),$$

więc zgodnie z interpretacją gradientu, niewielki wzrost nakładów na reklamę i dział obsługi klienta należy podzielić w stosunku $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$, czyli $4 : 5$, by zysk z tego wzrostu był jak największy.

Pochodna kierunkowa - definicja

Pochodna kierunkowa

Pochodną kierunkową funkcji $f : \mathbb{R}^n \supset D_f \to \mathbb{R}$ zmiennych $(x_1, \ldots, x_n)$ w punkcie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ w kierunku wektora $v = (v_1, \ldots, v_n)$ nazywamy granicę (o ile istnieje i jest skończona):

$$f'_v(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h \cdot v) - f(a)}{h}.$$

Pochodna kierunkowa - definicja

Pochodna kierunkowa

Pochodną kierunkową funkcji $f : \mathbb{R}^n \supset D_f \to \mathbb{R}$ zmiennych $(x_1, \ldots, x_n)$ w punkcie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ w kierunku wektora $v = (v_1, \ldots, v_n)$ nazywamy granicę (o ile istnieje i jest skończona):

$$f_v'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h \cdot v) - f(a)}{h}.$$

Jak widać, definicja jest podobna do definicji zwykłej pochodnej, przy czym wzrost wartości mierzymy tylko w zadanym kierunku v i dzielimy go przez przyrost argumentu jako wielokrotności wektora v.

Pochodna kierunkowa - definicja

Pochodna kierunkowa

Pochodną kierunkową funkcji $f : \mathbb{R}^n \supset D_f \to \mathbb{R}$ zmiennych $(x_1, \ldots, x_n)$ w punkcie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ w kierunku wektora $v = (v_1, \ldots, v_n)$ nazywamy granicę (o ile istnieje i jest skończona):

$$f'_v(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h \cdot v) - f(a)}{h}.$$

Jak widać, definicja jest podobna do definicji zwykłej pochodnej, przy czym wzrost wartości mierzymy tylko w zadanym kierunku v i dzielimy go przez przyrost argumentu jako wielokrotności wektora v. Uwaga! W powyższej definicji $a + h \cdot v = (a_1 + hv_1, \ldots, a_n + hv_n)$.

Pochodna kierunkowa - interpretacja

Pochodna kierunkowa i monotoniczność

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w kuli otwartej o promieniu r i $f'_v(x) > 0$ dla każdego x z tej kuli, to wewnątrz tej kuli f rośnie w kierunku wektora v tj. $f(x) < f(x + t \cdot v)$ dla każdego $t > 0$ takiego, że $x + t \cdot v$ należy do wspomnianej kuli.
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w kuli otwartej o promieniu r i $f'_v(x) < 0$ dla każdego x z tej kuli, to wewnątrz tej kuli f maleje w kierunku wektora v tj. $f(x) > f(x + t \cdot v)$ dla każdego $t > 0$ takiego, że $x + t \cdot v$ należy do wspomnianej kuli.

Pochodna kierunkowa - interpretacja

Pochodna kierunkowa i monotoniczność

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w kuli otwartej o promieniu r i $f'_v(x) > 0$ dla każdego x z tej kuli, to wewnątrz tej kuli f rośnie w kierunku wektora v tj. $f(x) < f(x + t \cdot v)$ dla każdego $t > 0$ takiego, że $x + t \cdot v$ należy do wspomnianej kuli.
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w kuli otwartej o promieniu r i $f'_v(x) < 0$ dla każdego x z tej kuli, to wewnątrz tej kuli f maleje w kierunku wektora v tj. $f(x) > f(x + t \cdot v)$ dla każdego $t > 0$ takiego, że $x + t \cdot v$ należy do wspomnianej kuli.

Dlatego pochodnej kierunkowej można użyć tak jak pochodnej funkcji jednej zmiennej, by sprawdzić monotoniczność funkcji wielu zmiennych wzdłuż pewnej prostej.

Pochodna kierunkowa - obliczanie

Oczywiście, pochodną kierunkową nienajlepiej liczy się z definicji. Dlatego przyda się nam następujące twierdzenie:

Gradient a pochodna kierunkowa

Jeśli w punkcie a funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe to:

$$f'_v(a) = < \nabla_f(a), v >,$$

gdzie $< \cdot, \cdot >$ oznacza iloczyn skalarny.

Pochodna kierunkowa - obliczanie

Oczywiście, pochodną kierunkową nienajlepiej liczy się z definicji. Dlatego przyda się nam następujące twierdzenie:

Gradient a pochodna kierunkowa

Jeśli w punkcie a funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe to:

$$f_v'(a) = < \nabla_f(a), v >,$$

gdzie $< \cdot, \cdot >$ oznacza iloczyn skalarny.

Pochodna kierunkowa - przykład

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2, 1)$. Jeśli nakłady na reklamę zmniejszymy o niewielką jednostkę i połowę z tak pozyskanych oszczędności przeznaczymy na dział obsługi klienta, to zyski firmy wzrosną, czy zmaleją?

Pochodna kierunkowa - przykład

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2,1)$. Jeśli nakłady na reklamę zmniejszymy o niewielką jednostkę i połowę z tak pozyskanych oszczędności przeznaczymy na dział obsługi klienta, to zyski firmy wzrosną, czy zmaleją?

Pytaniem w zadaniu jest: czy f rośnie, czy maleje w otoczeniu $(2,1)$ wzdłuż wektora

Pochodna kierunkowa - przykład

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2, 1)$. Jeśli nakłady na reklamę zmniejszymy o niewielką jednostkę i połowę z tak pozyskanych oszczędności przeznaczymy na dział obsługi klienta, to zyski firmy wzrosną, czy zmaleją?

Pytaniem w zadaniu jest: czy f rośnie, czy maleje w otoczeniu $(2, 1)$ wzdłuż wektora $(-1, \frac{1}{2})$ (bo jak x zmniejszamy o jednostkę, to y zwiększamy o jej połowę).

Pochodna kierunkowa - przykład

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2,1)$. Jeśli nakłady na reklamę zmniejszymy o niewielką jednostkę i połowę z tak pozyskanych oszczędności przeznaczymy na dział obsługi klienta, to zyski firmy wzrosną, czy zmaleją?

Pytaniem w zadaniu jest: czy f rośnie, czy maleje w otoczeniu $(2,1)$ wzdłuż wektora $(-1, \frac{1}{2})$ (bo jak x zmniejszamy o jednostkę, to y zwiększamy o jej połowę). Jednocześnie wiemy, że $\nabla_f(2,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)$, stąd:

$$f'_{(-1,\frac{1}{2})}(2,1) =< \nabla_f(2,1), (-1, \frac{1}{2}) >=$$

Pochodna kierunkowa - przykład

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2,1)$. Jeśli nakłady na reklamę zmniejszymy o niewielką jednostkę i połowę z tak pozyskanych oszczędności przeznaczymy na dział obsługi klienta, to zyski firmy wzrosną, czy zmaleją?

Pytaniem w zadaniu jest: czy f rośnie, czy maleje w otoczeniu $(2,1)$ wzdłuż wektora $(-1, \frac{1}{2})$ (bo jak x zmniejszamy o jednostkę, to y zwiększamy o jej połowę). Jednocześnie wiemy, że $\nabla_f(2,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)$, stąd:

$$f'_{(-1,\frac{1}{2})}(2,1) = < \nabla_f(2,1), (-1, \frac{1}{2}) > = \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Pochodna kierunkowa - przykład

Zadanie

Załóżmy, że zyski firmy z nakładów na reklamę (x) i na dział obsługi klienta (y) wyrażają się wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}$. Obecne nakłady wynoszą $(2, 1)$. Jeśli nakłady na reklamę zmniejszymy o niewielką jednostkę i połowę z tak pozyskanych oszczędności przeznaczymy na dział obsługi klienta, to zyski firmy wzrosną, czy zmaleją?

Pytaniem w zadaniu jest: czy f rośnie, czy maleje w otoczeniu $(2, 1)$ wzdłuż wektora $(-1, \frac{1}{2})$ (bo jak x zmniejszamy o jednostkę, to y zwiększamy o jej połowę). Jednocześnie wiemy, że $\nabla_f(2, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)$, stąd:

$$f'_{(-1,\frac{1}{2})}(2, 1) = < \nabla_f(2, 1), (-1, \frac{1}{2}) > = \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Odpowiednia pochodna kierunkowa jest ujemna, więc zyski zmaleją.

Pochodna kierunkowa i pochodne cząstkowe

Pochodna kierunkowa

Pochodną kierunkową (...) nazywamy granicę (...):

$$f'_v(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h \cdot v) - f(a)}{h}.$$

Pochodna kierunkowa i pochodne cząstkowe

Pochodna kierunkowa

Pochodną kierunkową (...) nazywamy granicę (...):

$$f_v'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h \cdot v) - f(a)}{h}.$$

Zauważmy, że pochodne cząstkowe są też pochodnymi kierunkowymi w kierunkach zadanych przez osie układu współrzędnych. Dokładniej, pochodna cząstkowa po zmiennej x_1 jest pochodną kierunkową w kierunku $(1, 0, \ldots, 0)$, pochodna cząstkowa po zmiennej x_2 jest pochodną kierunkową w kierunku $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ itd.

Pochodna kierunkowa i pochodne cząstkowe

Pochodna kierunkowa

Pochodną kierunkową (...) nazywamy granicę (...):

$$f'_v(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h \cdot v) - f(a)}{h}.$$

Zauważmy, że pochodne cząstkowe są też pochodnymi kierunkowymi w kierunkach zadanych przez osie układu współrzędnych. Dokładniej, pochodna cząstkowa po zmiennej x_1 jest pochodną kierunkową w kierunku $(1, 0, \ldots, 0)$, pochodna cząstkowa po zmiennej x_2 jest pochodną kierunkową w kierunku $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ itd. Tak więc pierwsze pochodne cząstkowe badają monotoniczność funkcji wielu zmiennych ze względu na daną zmienną (przy wszystkich pozostałych ustalonych).

Pochodne cząstkowe i wypukłość

Podobne trudności jak z badaniem monotoniczności napotykamy, próbując zbadać wypukłość funkcji wielu zmiennych.

Pochodne cząstkowe i wypukłość

Podobne trudności jak z badaniem monotoniczności napotykamy, próbując zbadać wypukłość funkcji wielu zmiennych. Tak jak monotoniczność ze względu na każdą zmienną z osobna można badać za pomocą pierwszych pochodnych cząstkowych, tak wypukłość badamy za pomocą drugich pochodnych cząstkowych. Szczególne zastosowanie tego faktu, to badanie wielowymiarowego prawa Gossena malejącej użyteczności krańcowej.

Prawo Gossena

Prawo Gossena - funkcja wielowymiarowa

Niech $U : \mathbb{R}^n \supset D_U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją użyteczności, jaką czerpie konsument z posiadania koszyka dóbr $(x_1, \ldots, x_n)$. Mówimy, że U spełnia prawo Gossena ze względu na każdą zmienną w zbiorze $A \subset D_U$, jeśli dla każdego $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$ funkcja $U_j(x_j) = U(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ (czyli funkcja jednej zmiennej x_j, przy wszystkich pozostałych zmiennych ustalonych) jest wklęsła w otoczeniu a_j.

Prawo Gossena

Prawo Gossena - funkcja wielowymiarowa

Niech $U : \mathbb{R}^n \supset D_U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją użyteczności, jaką czerpie konsument z posiadania koszyka dóbr $(x_1, \ldots, x_n)$. Mówimy, że U spełnia prawo Gossena ze względu na każdą zmienną w zbiorze $A \subset D_U$, jeśli dla każdego $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$ funkcja $U_j(x_j) = U(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ (czyli funkcja jednej zmiennej x_j, przy wszystkich pozostałych zmiennych ustalonych) jest wklęsła w otoczeniu a_j.

Interpretacja: u spełnia prawo Gossena, jeśli zwiększanie ilości tylko jednego dobra w koszyku, przy niezmienionej ilości dóbr pozostałych, powoduje coraz wolniejszy przyrost użyteczności koszyka.

Prawo Gossena - twierdzenie

Prawo Gossena i pochodne cząstkowe

Jeśli U jest funkcją użyteczności koszyka dóbr $(x_1, \ldots, x_n)$ dla konsumenta, to spełnia ona prawo Gossena (malejącej użyteczności krańcowej) wtedy i tylko wtedy gdy jej drugie pochodne jednorodne (tj. „niemieszane") są ujemne (tj. $U''_{x_1x_1} < 0, U''_{x_2x_2} < 0, \ldots$)

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2015, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2015, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:

$u'_x(x, y) =$

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2015, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:

$u'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} +$

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2015, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:
$u'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}(xy^3)^{-\frac{3}{4}} \cdot y^3 =$

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2015, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:

$u'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}(xy^3)^{-\frac{3}{4}} \cdot y^3 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$

$u''_{xx}(x, y) =$

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2015, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:

$u'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}(xy^3)^{-\frac{3}{4}} \cdot y^3 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$

$u''_{xx}(x, y) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2015, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:

$u'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}(xy^3)^{-\frac{3}{4}} \cdot y^3 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$

$u''_{xx}(x, y) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{3}{16}(x)^{-\frac{7}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}}$

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2015, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:

$u'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}(xy^3)^{-\frac{3}{4}} \cdot y^3 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$

$u''_{xx}(x, y) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{3}{16}(x)^{-\frac{7}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}} < 0$, dla $x, y > 0$.

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2016, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2016, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:

$u'_y(x, y) =$

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2016, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:

$u'_y(x, y) = \frac{1}{4}(xy^3)^{-\frac{3}{4}} \cdot 3xy^2 + \frac{1}{2} =$

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2016, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:

$u'_y(x, y) = \frac{1}{4}(xy^3)^{-\frac{3}{4}} \cdot 3xy^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}.$

$u''_{yy}(x, y) =$

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2016, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:

$u'_y(x, y) = \frac{1}{4}(xy^3)^{-\frac{3}{4}} \cdot 3xy^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}.$

$u''_{yy}(x, y) = -\frac{3}{16}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{5}{4}} < 0$, dla $x, y > 0$.

Prawo Gossena - przykład

Egzamin 2016, II termin

Konsument wydaje x na mydło, a y na szampon $(x, y > 0)$. Jego funkcja użyteczności z wydatków na te dwa dobra jest postaci: $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{xy^3} + \frac{1}{2}y$. Załóżmy, że obecne wydatki konsumenta są opisywane przez parę $(x_0, y_0) = (16, 81)$. Sprawdzić, czy funkcja u spełnia prawo Gossena ze względu na obydwa dobra dla $x, y > 0$.

Obliczamy:
$u'_y(x, y) = \frac{1}{4}(xy^3)^{-\frac{3}{4}} \cdot 3xy^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$.
$u''_{yy}(x, y) = -\frac{3}{16}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{5}{4}} < 0$, dla $x, y > 0$.
Skoro $u''_{xx}(x, y) < 0$ i $u''_{yy}(x, y) < 0$ dla $x, y > 0$, to u spełnia prawo Gossena.