Egzamin z matematyki dyskretnej, stacjonarne, termin 2, 19 II 2024

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut. Nikt nie wychodzi w ciągu ostatnich 10 minut.
2. Podczas egzaminu wolno korzystać jedynie z kalkulatora, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od prowadzących egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno używać telefonów komórkowych i własnych kartek.
3. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem.
4. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.

Zadania:

1. (400 punktów) Komitet Wsparcia Matematyki Dyskretnej organizuje demonstrację przeciw rządzącej partii Pochodna i Całka.

a) Organizatorzy mają przygotowane 50 haseł do skandowania i 20 do wypisania na transparentach. Chcą wybrać 15 haseł do skandowania i ustalić ich kolejność podczas demonstracji (skandowane hasła nie mogą się powtarzać) oraz wybrać 7 transparentów do ustawienia w tle (dokładne ustawienie tych transparentów nie ma znaczenia, ale hasła na nich mają być różne). Ile zestawów złożonych z ciągu haseł skandowanych i zbioru haseł na transparentach mogą rozważać?

b) Podczas demonstracji ma przemawiać 31 osób z 6 frakcji: antycałkowców, antyróżniczkowców, kombinatoryków, teorioliczbowców, teoriografistów i rekurencjonistów. Na ile sposobów można rozdzielić przemówienia pomiędzy te frakcje, jeśli zakładamy, że kolejność przemówień nie ma znaczenia, ale każda frakcja ma mieć przydzielone co najmniej 1 przemówienie, zaś najsilniejsze frakcje: kombinatoryków i rekurencjonistów muszą mieć przydzielone co najmniej po 3 przemówienia?

c) 22 członków Komitetu postanowiło wybrać spośród siebie 3-osobową komisję ds. przygotowywania ulotek, 6-osobową komisję ds. zapewnienia bezpieczeństwa demonstracji i 4-osobową komisję ds. kontaktów z mediami. Na ile sposobów mogą to zrobić, jeśli założymy, że nikt nie może zasiadać w dwu takich komisjach jednocześnie?

d) Władze miejskie wyraziły zgodę na demonstrację, o ile każdemu jej uczestnikowi zostanie przypisany 4-cyfrowy numer. Numery te muszą tworzyć liczby większe lub równe 1000 (czyli pierwsza cyfra nie może być zerem), które nie mogą być podzielne przez 9, przez 12, ani przez 21. Ilu uczestników może mieć demonstracja, jeśli organizatorzy chcą przestrzegać tego zalecenia?

2. a) (250pkt) Udowodnić za pomocą indukcji matematycznej, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $3 \cdot 6^{n+1} + 4 \cdot 5^{2n+1}$ jest podzielna przez 19.

b) (150 pkt) Wyznaczyć jedno rozwiązanie szczególne poniższego równania rekurencyjnego:

$$s_{n+1} = 3s_n - 2s_{n-1} + 9.$$

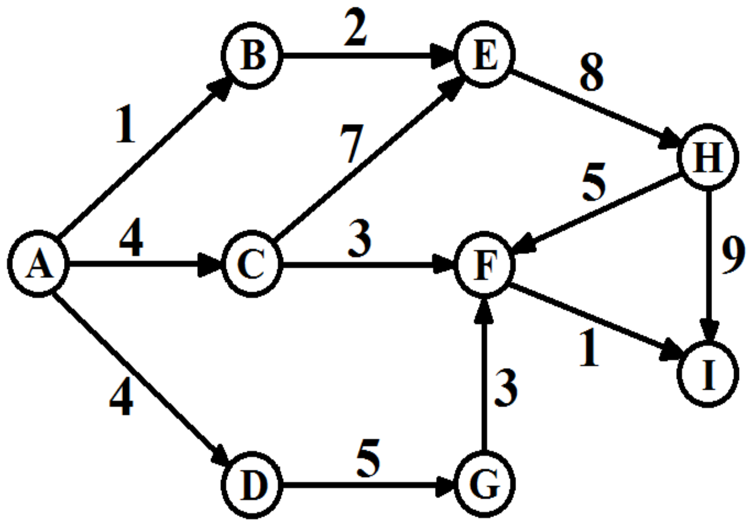
3. a) (200 pkt) Wskazać spośród par: $(77, 21)$, $(165, 41)$, $(91, 17)$ tę, która może być kluczem publicznym w systemie RSA i uzasadnić, dlaczego pozostałe dwie nie mogą. Dla poprawnej pary wyznaczyć klucz prywatny, a następnie obliczyć, jaka jednostka tekstu jawnego zostanie odszyfrowana z jednostki szyfrogramu o numerze 6.

b) (200 pkt) Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która daje resztę 1 z dzielenia przez 7, resztę 2 z dzielenia przez 8 i resztę 3 z dzielenia przez 11.

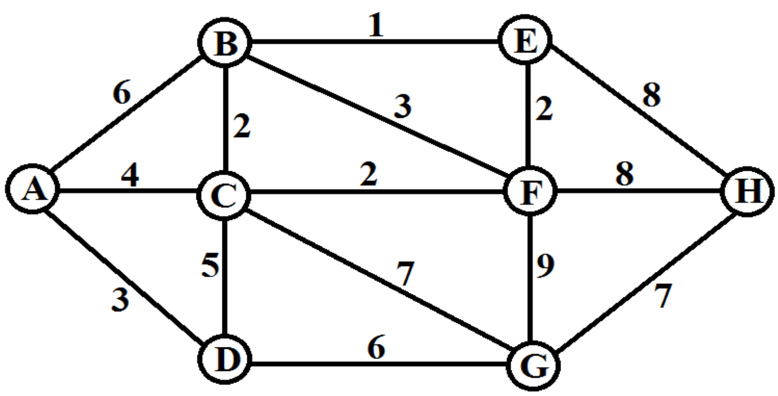
4. (400 punktów)

a) Za pomocą algorytmu Edmondsa-Karpa znaleźć maksymalny przepływ pomiędzy wierzchołkami A oraz I w poniższym grafie skierowanym. Uzupełnić odpowiednią tabelę przebiegu algorytmu i narysować graf z oznaczonym maksymalnym przepływem.

Nr etapu	Ścieżka powiększająca	Przepustowość	Alternatywy



b) Znaleźć minimalne drzewo spinające dla poniższego grafu za pomocą algorytmu Kruskala oraz za pomocą algorytmu Prima. Przebieg każdego algorytmu zapisać w odpowiadającej mu tabeli. Jeśli algorytm trzeba rozpocząć od jakiegoś wierzchołka, rozpocząć należy od A. Jeśli algorytm wymaga uszeregowania krawędzi, wypisać to uszeregowanie. Podpisać każdy z algorytmów oraz podać wagę każdego z uzyskanych minimalnych drzew spinających.



Nr etapu	Wybrana krawędź	Krawędzie odrzucone przed wyborem/Alternatywy

5. (400 punktów) a) Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

b) Narysować po jednym przykładzie grafu prostego i spójnego o co najmniej 5 wierzchołkach i 5 krawędziach spełniającym następujące warunki lub uzasadnić dlaczego taki graf nie istnieje:

I. Graf dwudzielny o indeksie chromatycznym 3, który nie jest hamiltonowski.

II. Graf dwudzielny, który nie jest drzewem.

III. Drzewo, które nie jest grafem dwudzielnym.

IV. Graf $V_1 \cup V_2$, który jest dwudzielny, $|V_1| \leq |V_2|$, ale graf nie posiada skojarzenia pełnego.