Grupa I

1. (200 pkt) Dane jest odwzorowanie liniowe T takie, że $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(2,3) = (-1,-3,5)$; $T(1,1) = (2,-2,2)$. Obliczyć $T(0,3)$.

2. (300 pkt) Niech $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, będzie dane wzorem $T(x,y) = (2x - y, -x + 3y)$, zaś złożenie odwzorowań $S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem $S \circ T(x,y) = (-x + 8y, x + 7y, -x - 2y)$.

a) Zbadać, czy T jest izomorfizmem.

b) Za pomocą rachunku macierzowego wyznaczyć dziedzinę, przeciwdziedzinę i wzór odwzorowania S.

3. (200 pkt) Wiemy, że T jest odwzorowaniem obrotu płaszczyzny o kąt $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Wiemy, że $M_T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania T i że $m_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Wyznaczyć macierz M_T i kąt φ.

b) Wyznaczyć wzór odwzorowania S takiego, że $S \circ T$ jest macierzą obrotu o kąt $\frac{3\pi}{2}$.

4. (400 pkt) Obliczyć wartości i wektory własne dla macierzy:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
Czy macierz ta jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnić.

5. (400 pkt) Poniższą macierz symetryczną A przedstawić w postaci $A = PD_\Lambda P^T$, gdzie P jest macierzą ortogonalną, a D_Λ jest postacią diagonalną macierzy A. Następnie obliczyć A^6 (w rozwiązaniu mogą się pojawić liczby typu x^6 - nie trzeba wykonywać potęgowania, jednak proszę o wykonanie wszystkich pozostałych mnożeń).
$$A = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$$

6. (250 pkt) Obserwowano grupę 900 podmiotów rynkowych inwestujących w złoto albo w srebro (zawsze tylko jeden z tych surowców). Co miesiąc, średnio $\frac{1}{5}$ inwestujących w złoto przerzucała się na inwestowanie w srebro, a średnio $\frac{1}{4}$ inwestujących w srebro przerzucała się na inwestycje w złoto (pozostałe podmioty inwestowały tak jak w poprzednim miesiącu). Sformułować układ równań dynamiki związanej z tym problemem, wyznaczyć jego macierz przejścia i stan równowagi. Czy macierz przejścia w tym układzie jest macierzą Markowa? Czy stan równowagi tego układu jest jego stanem granicznym? Odpowiedź uzasadnić.

7. (250 pkt) Wyznaczyć macierz i zbadać określoność formy kwadratowej zadanej wzorem: $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 8yz$.

8. (200 pkt) Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, a B jest macierzą symetryczną o wymiarach 3×3, współczynnikach rzeczywistych i wartościach własnych -3, -2 i 4. Za pomocą twierdzenia Cayley'a-Hamiltona wyznaczyć liczby rzeczywiste a, b i c takie, że $A^{-1} = aA^2 + bA + cI$, gdzie I jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru.

Dodatkowo, odpowiedzieć na poniższe pytania bez uzasadniania. Jeśli podane informacje umożliwiają kilka odpowiedzi na zadane pytanie, podać wszystkie możliwe wyniki. Jeśli podane informacje nie są wystarczające, by zbiór odpowiedzi zawęzić do 2 lub mniej elementów, należy to napisać.

a) Jaka jest określoność formy kwadratowej, której macierzą jest $B + 5I$?

b) Jaka jest suma wartości własnych macierzy $A + 2B \cdot B^T$?

Powodzenia!
Grzesiek Kosiorowski

Grupa J

1. (200 pkt) Dane jest odwzorowanie liniowe T takie, że $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(3,1) = (5,-3,-5)$; $T(4,5) = (3,16,6)$. Obliczyć $T(10,-4)$.

2. (300 pkt) Niech $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, będzie dane wzorem $S(x,y) = (x-3y, x+4y)$, zaś złożenie odwzorowań $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem $S \circ T(x,y,z) = (x-5y+2z, 8x+2y-5z)$.

a) Zbadać, czy S jest izomorfizmem.

b) Za pomocą rachunku macierzowego wyznaczyć dziedzinę, przeciwdziedzinę i wzór odwzorowania T.

3. (200 pkt) Wiemy, że T jest odwzorowaniem obrotu płaszczyzny o kąt $\varphi \in (0,\pi)$. Wiemy, że $M_T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania T i że $m_{11} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Wyznaczyć macierz M_T i kąt φ.

b) Wyznaczyć wzór odwzorowania S takiego, że $S \circ T$ jest macierzą obrotu o kąt $\frac{\pi}{3}$.

4. (400 pkt) Obliczyć wartości i wektory własne dla macierzy:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz ta jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnić.

5. (400 pkt) Poniższą macierz symetryczną A przedstawić w postaci $A = PD_\Lambda P^T$, gdzie P jest macierzą ortogonalną, a D_Λ jest postacią diagonalną macierzy A. Następnie obliczyć A^7 (w rozwiązaniu mogą się pojawić liczby typu x^7 - nie trzeba wykonywać potęgowania, jednak proszę o wykonanie wszystkich pozostałych mnożeń).

$$\begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{bmatrix}$$

6. (250 pkt) Obserwowano akcje 500 pewnych spółek na giełdzie, dzieląc je na dwie podgrupy: te, których cena w danym miesiącu rosła i te, których cena w danym miesiącu malała. Co miesiąc, średnio $\frac{3}{8}$ spółek, których cena akcji w poprzednim miesiącu malała, notowało wzrost cen akcji, a średnio $\frac{1}{4}$ spółek, których cena akcji w poprzednim miesiącu rosła, notowało spadek cen akcji (pozostałe akcje zachowywały dynamikę wzrostu). Sformułować układ równań dynamiki związanej z tym problemem, wyznaczyć jego macierz przejścia i stan równowagi. Czy macierz przejścia w tym układzie jest macierzą Markowa? Czy stan równowagi tego układu jest jego stanem granicznym? Odpowiedź uzasadnić.

7. (250 pkt) Wyznaczyć macierz i zbadać określoność formy kwadratowej zadanej wzorem: $f(x,y,z) = -2x^2 - 3y^2 - 4z^2 + 2xy + 4xz$.

8. (200 pkt) Macierz A jest macierzą symetryczną o wymiarach 3×3, współczynnikach rzeczywistych i wartościach własnych -4, -2 i -1, a $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Za pomocą twierdzenia Cayley'a-Hamiltona wyznaczyć liczby rzeczywiste a, b i c takie, że $B^{-1} = aB^2 + bB + cI$, gdzie I jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru.

Dodatkowo, odpowiedzieć na poniższe pytania bez uzasadniania. Jeśli podane informacje umożliwiają dwie odpowiedzi na zadane pytanie, podać obydwa możliwe wyniki. Jeśli podane informacje nie są wystarczające, by zbiór odpowiedzi zawęzić do 2 lub mniej elementów, należy to napisać.

a) Ile wynosi iloczyn wartości własnych macierzy $2A^{-1}B$?

b) Jaka jest określoność formy kwadratowej, której macierzą jest $A + 4I$?

Powodzenia!

Grzesiek Kosiorowski

Grupa K

1. (200 pkt) Dane jest odwzorowanie liniowe T takie, że $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(2,3) = (-1,-3,5)$; $T(1,1) = (2,-2,2)$. Obliczyć $T(0,3)$.

2. (300 pkt) Niech $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, będzie dane wzorem $T(x,y) = (2x-y, -x+3y)$, zaś złożenie odwzorowań $S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem $S \circ T(x,y) = (-x+8y, x+7y, -x-2y)$.

a) Zbadać, czy T jest izomorfizmem.

b) Za pomocą rachunku macierzowego wyznaczyć dziedzinę, przeciwdziedzinę i wzór odwzorowania S.

3. (200 pkt) Wiemy, że T jest odwzorowaniem obrotu płaszczyzny o kąt $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Wiemy, że $M_T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania T i że $m_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Wyznaczyć macierz M_T i kąt φ.

b) Wyznaczyć wzór odwzorowania S takiego, że $S \circ T$ jest macierzą obrotu o kąt $\frac{3\pi}{2}$.

4. (400 pkt) Obliczyć wartości i wektory własne dla macierzy:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
Czy macierz ta jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnić.

5. (400 pkt) Poniższą macierz symetryczną A przedstawić w postaci $A = PD_\Lambda P^T$, gdzie P jest macierzą ortogonalną, a D_Λ jest postacią diagonalną macierzy A. Następnie obliczyć A^6 (w rozwiązaniu mogą się pojawić liczby typu x^6 - nie trzeba wykonywać potęgowania, jednak proszę o wykonanie wszystkich pozostałych mnożeń).

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$$

6. (250 pkt) Obserwowano grupę 900 podmiotów rynkowych inwestujących w złoto albo w srebro (zawsze tylko jeden z tych surowców). Co miesiąc, średnio $\frac{1}{5}$ inwestujących w złoto przerzucała się na inwestowanie w srebro, a średnio $\frac{1}{4}$ inwestujących w srebro przerzucała się na inwestycje w złoto (pozostałe podmioty inwestowały tak jak w poprzednim miesiącu). Sformułować układ równań dynamiki związanej z tym problemem, wyznaczyć jego macierz przejścia i stan równowagi. Czy macierz przejścia w tym układzie jest macierzą Markowa? Czy stan równowagi tego układu jest jego stanem granicznym? Odpowiedź uzasadnić.

7. (250 pkt) Wyznaczyć macierz i zbadać określoność formy kwadratowej zadanej wzorem: $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 8yz$.

8. (200 pkt) Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, a B jest macierzą symetryczną o wymiarach 3×3, współczynnikach rzeczywistych i wartościach własnych -3, -2 i 4. Za pomocą twierdzenia Cayley'a-Hamiltona wyznaczyć liczby rzeczywiste a, b i c takie, że $A^{-1} = aA^2 + bA + cI$, gdzie I jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru.

Dodatkowo, odpowiedzieć na poniższe pytania bez uzasadniania. Jeśli podane informacje umożliwiają kilka odpowiedzi na zadane pytanie, podać wszystkie możliwe wyniki. Jeśli podane informacje nie są wystarczające, by zbiór odpowiedzi zawęzić do 2 lub mniej elementów, należy to napisać.

a) Jaka jest określoność formy kwadratowej, której macierzą jest $B + 5I$?

b) Jaka jest suma wartości własnych macierzy $A + 2B \cdot B^T$?

Powodzenia!
Grzesiek Kosiorowski

Grupa L

1. (200 pkt) Dane jest odwzorowanie liniowe T takie, że $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(3,1) = (5,-3,-5)$; $T(4,5) = (3,16,6)$. Obliczyć $T(10,-4)$.

2. (300 pkt) Niech $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, będzie dane wzorem $S(x,y) = (x-3y, x+4y)$, zaś złożenie odwzorowań $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem $S \circ T(x,y,z) = (x-5y+2z, 8x+2y-5z)$.

a) Zbadać, czy S jest izomorfizmem.

b) Za pomocą rachunku macierzowego wyznaczyć dziedzinę, przeciwdziedzinę i wzór odwzorowania T.

3. (200 pkt) Wiemy, że T jest odwzorowaniem obrotu płaszczyzny o kąt $\varphi \in (0,\pi)$. Wiemy, że $M_T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania T i że $m_{11} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Wyznaczyć macierz M_T i kąt φ.

b) Wyznaczyć wzór odwzorowania S takiego, że $S \circ T$ jest macierzą obrotu o kąt $\frac{\pi}{3}$.

4. (400 pkt) Obliczyć wartości i wektory własne dla macierzy:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz ta jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnić.

5. (400 pkt) Poniższą macierz symetryczną A przedstawić w postaci $A = PD_\Lambda P^T$, gdzie P jest macierzą ortogonalną, a D_Λ jest postacią diagonalną macierzy A. Następnie obliczyć A^7 (w rozwiązaniu mogą się pojawić liczby typu x^7 - nie trzeba wykonywać potęgowania, jednak proszę o wykonanie wszystkich pozostałych mnożeń).

$$\begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{bmatrix}$$

6. (250 pkt) Obserwowano akcje 500 pewnych spółek na giełdzie, dzieląc je na dwie podgrupy: te, których cena w danym miesiącu rosła i te, których cena w danym miesiącu malała. Co miesiąc, średnio $\frac{3}{8}$ spółek, których cena akcji w poprzednim miesiącu malała, notowało wzrost cen akcji, a średnio $\frac{1}{4}$ spółek, których cena akcji w poprzednim miesiącu rosła, notowało spadek cen akcji (pozostałe akcje zachowywały dynamikę wzrostu). Sformułować układ równań dynamiki związanej z tym problemem, wyznaczyć jego macierz przejścia i stan równowagi. Czy macierz przejścia w tym układzie jest macierzą Markowa? Czy stan równowagi tego układu jest jego stanem granicznym? Odpowiedź uzasadnić.

7. (250 pkt) Wyznaczyć macierz i zbadać określoność formy kwadratowej zadanej wzorem: $f(x,y,z) = -2x^2 - 3y^2 - 4z^2 + 2xy + 4xz$.

8. (200 pkt) Macierz A jest macierzą symetryczną o wymiarach 3×3, współczynnikach rzeczywistych i wartościach własnych -4, -2 i -1, a $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Za pomocą twierdzenia Cayley'a-Hamiltona wyznaczyć liczby rzeczywiste a, b i c takie, że $B^{-1} = aB^2 + bB + cI$, gdzie I jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru.

Dodatkowo, odpowiedzieć na poniższe pytania bez uzasadniania. Jeśli podane informacje umożliwiają dwie odpowiedzi na zadane pytanie, podać obydwa możliwe wyniki. Jeśli podane informacje nie są wystarczające, by zbiór odpowiedzi zawęzić do 2 lub mniej elementów, należy to napisać.

a) Ile wynosi iloczyn wartości własnych macierzy $2A^{-1}B$?

b) Jaka jest określoność formy kwadratowej, której macierzą jest $A + 4I$?

Powodzenia!
Grzesiek Kosiorowski