Grupa E

1. (300 pkt) Rozwiązać metodą Gaussa-Jordana układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 3x + 4y - z - v = 3 \\ -x + 4z + 2v = 11 \\ 5x + 8y + 2z = 17 \end{cases}.$$

2. (300 pkt) Wyznaczyć za pomocą twierdzenia Kroneckera-Capellego (bez rozwiązywania), ile (w zależności od parametru k) rozwiązań ma poniższy układ równań liniowych zmiennych x, y:

$$\begin{cases} kx + 3y = 1 - k \\ 4x + (k-4)y = -6 \end{cases}.$$

3. (250 pkt) Obliczyć wyznacznik i ślad macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

4. (350 pkt) Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy: $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 10 & -16 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

5. (400 pkt) Używając macierzy odwrotnej, rozwiązać równania macierzowe ze względu na zmienną X (I jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru):

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -1 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} + 3\left[\left(2I + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\right) \cdot X\right]^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 6 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. (200 pkt) Czy poniższy układ wektorów jest liniowo niezależny? Jaki jest wymiar przestrzeni generowanej przez te wektory?

$$\{(2, -1, -3, 3), (4, 4, -3, 0), (-2, -1, 2, -1), (0, 2, 1, -2)\}.$$

7. (100 pkt) Macierze A, B i C są wymiaru 5×5. Ponadto, wiemy, że $\det A = 4$, $\operatorname{tr} A = 0$, $\det B = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tr} B = 1$, $\operatorname{rz} C = 3$, $\operatorname{tr} C = -5$. Obliczyć (lub uzasadnić, czemu jednoznaczne podanie odpowiedzi nie jest możliwe):

a) $\det[(-2) \cdot A^{-1}B^2]$;
b) $\operatorname{rz}(A \cdot B^T)$;
c) $\det(B^{-1}C^T)$;
d) $\operatorname{tr}(3AC)$;
e) $\det(A^{-1} + C)$.

Powodzenia!
Grzesiek Kosiorowski

Grupa F

1. (300 pkt) Rozwiązać metodą Gaussa-Jordana układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 4x+y-2z=3 \\ 7x-z=-5 \\ x+2y-3z=11 \\ 7y-10z=41 \end{cases}.$$

2. (300 pkt) Wyznaczyć za pomocą twierdzenia Kroneckera-Capellego (bez rozwiązywania), ile (w zależności od parametru k) rozwiązań ma poniższy układ równań liniowych zmiennych x, y:

$$\begin{cases} (k-7)x+4y=3 \\ 2x+ky=k+2 \end{cases}.$$

3. (250 pkt) Obliczyć wyznacznik i ślad macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & 10 & -16 \end{bmatrix}$.

4. (350 pkt) Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy: $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. (400 pkt) Używając macierzy odwrotnej, rozwiązać równania macierzowe ze względu na zmienną X (I jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru):

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} - 2\left[X \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 3I\right)\right]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. (200 pkt) Czy poniższy układ wektorów jest liniowo niezależny? Jaki jest wymiar przestrzeni generowanej przez te wektory?

$$\{(0,1,3,-1), (-1,-2,1,1), (2,5,1,-3), (1,5,8,-4)\}.$$

7. (100 pkt) Macierze A, B i C są wymiaru 4×4. Ponadto, wiemy, że $\operatorname{rz} A = 2$, $\operatorname{tr} A = 1$, $\det B = 3$, $\operatorname{tr} B = -2$, $\det C = 27$, $\operatorname{tr} C = -1$. Obliczyć (lub uzasadnić, czemu jednoznaczne podanie odpowiedzi nie jest możliwe):

a) $\operatorname{tr}(A + 2B - 3C)$;
b) $\det(3B^2C^{-1})$;
c) $\operatorname{rz}(B^TC)$;
d) $\det(B^{-1} + 2C)$;
e) $\det(A^TB^{-1})$.

Powodzenia!
Grzesiek Kosiorowski

Grupa G

1. (300 pkt) Rozwiązać metodą Gaussa-Jordana układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 2v = 1 \\ 2x + y - 3v = -2 \\ 5x + 4y - 3z + 12v = 7 \end{cases}.$$

2. (300 pkt) Wyznaczyć za pomocą twierdzenia Kroneckera-Capellego (bez rozwiązywania), ile (w zależności od parametru k) rozwiązań ma poniższy układ równań liniowych zmiennych x, y:

$$\begin{cases} (k-10)x + 3y = 6 \\ -3x + ky = k + 1 \end{cases}.$$

3. (250 pkt) Obliczyć wyznacznik i ślad macierzy:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 10 & -16 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. (350 pkt) Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. (400 pkt) Używając macierzy odwrotnej, rozwiązać równania macierzowe ze względu na zmienną X (I jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru):

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 3\left[X \cdot \left(\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2I\right)\right]^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. (200 pkt) Czy poniższy układ wektorów jest liniowo niezależny? Jaki jest wymiar przestrzeni generowanej przez te wektory?

$$\{(2, 1, 3, 1), (-3, -4, -1, 6), (0, -5, 7, 15), (1, -2, 5, 8)\}.$$

7. (100 pkt)Macierze A, B i C są wymiaru 6×6. Ponadto, wiemy, że $\det A = 27$, $\operatorname{tr} A = -1$, $\operatorname{rz} B = 2$, $\operatorname{tr} B = 1$, $\det C = 2$, $\operatorname{tr} C = -2$. Obliczyć (lub uzasadnić, czemu jednoznaczne podanie odpowiedzi nie jest możliwe):

a) $\det(C^{-1} + 2A)$;
b) $\operatorname{rz}(A^T C)$;
c) $\det(B^T C^{-1})$;
d) $\det(3C^2 A^{-1})$;
e) $\operatorname{tr}(A + 2B - 3C)$.

Powodzenia!
Grzesiek Kosiorowski

Grupa H

1. (300 pkt) Rozwiązać metodą Gaussa-Jordana układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 5 \\ x + 7y = 17 \\ 5y + z = 11 \end{cases}.$$

2. (300 pkt) Wyznaczyć za pomocą twierdzenia Kroneckera-Capellego (bez rozwiązywania), ile (w zależności od parametru k) rozwiązań ma poniższy układ równań liniowych zmiennych x, y:

$$\begin{cases} kx - 6y = 3 - k \\ x + (k+5)y = -2 \end{cases}.$$

3. (250 pkt) Obliczyć wyznacznik i ślad macierzy: $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

4. (350 pkt) Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & 10 & -16 \end{bmatrix}$.

5. (400 pkt) Używając macierzy odwrotnej, rozwiązać równania macierzowe ze względu na zmienną X (I jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru):

$$2\left[\left(\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4I\right) \cdot X\right]^T + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. (200 pkt) Czy poniższy układ wektorów jest liniowo niezależny? Jaki jest wymiar przestrzeni generowanej przez te wektory?

$$\{(1,2,1,-1),(0,1,3,-4),(2,3,-1,2),(2,1,3,-1)\}.$$

7. (100 pkt) Macierze A, B i C są wymiaru 5×5. Ponadto, wiemy, że $\det A = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tr} A = 1$, $\operatorname{rz} B = 3$, $\operatorname{tr} B = -5$, $\det C = 4$, $\operatorname{tr} C = 0$. Obliczyć (lub uzasadnić, czemu jednoznaczne podanie odpowiedzi nie jest możliwe):

a) $\operatorname{tr}(4BC)$;
b) $\operatorname{rz}(C \cdot A^T)$;
c) $\det(A^{-1}B^T)$;
d) $\det(B + C^{-1})$;
e) $\det[(-2) \cdot C^{-1}A^3]$.

Powodzenia!
Grzesiek Kosiorowski