

**Informacje dla zdających:**

1. Egzamin trwa 90 minut. Nikt nie wychodzi w ciągu ostatnich 10 minut.
  2. Podczas egzaminu wolno korzystać jedynie z kalkulatora, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od prowadzących egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno używać telefonów komórkowych i własnych kartek.
  3. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem.
  4. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.
- 

**Zadania:**

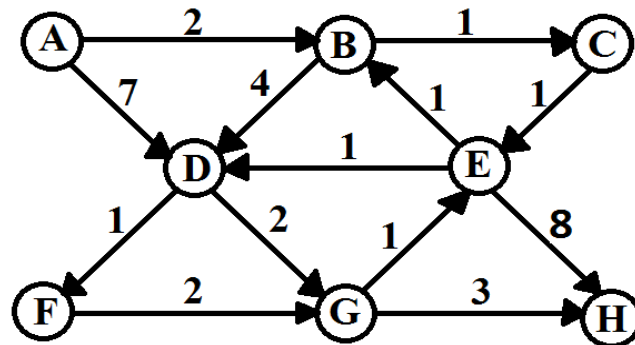
1. (400 punktów) Złowrogi Darth Euler chce zniszczyć 15 planet znajdujących się w 4 systemach gwiazdnych: Euklides, Tocjent, Petersen i Hamilton. Systemy te zawierają odpowiednio 13, 17, 32 i 44 planety.
  - a) Na ile sposobów Darth Euler może wybrać planety do zniszczenia, jeśli chce zniszczyć dokładnie 6 z systemu Hamilton, dokładnie 5 z systemu Petersen i co najmniej 2 z systemu Tocjent (przy założeniu, że planety w każdym z systemów są rozróżnialne)?
  - b) Darth Euler chce zniszczyć co najmniej 1 planetę z każdego systemu. Na ile sposobów może wybrać liczbę planet do zniszczenia we wszystkich systemach, jeżeli istotna jest dla nas łącznie liczba planet z każdego systemu, a nie które dokładnie planety zostaną zniszczone?
  - c) Załóżmy, że Darth Euler zmienił zdanie i postanowił zniszczyć wszystkie planety ze wspomnianych 4 układów planetarnych (wszystkie planety są rozróżnialne, ale tym razem nie jest istotne, z jakich systemów pochodzą). Nie chce ich niszczyć jednocześnie, lecz po kolei: w pierwszej fazie 20 planet, w drugiej 30, w trzeciej 40, a w czwartej resztę. Na ile sposobów może przyporządkować planety do tych faz?
  - d) Grupa 100 lobbystów próbuje przekonać Dartha Eulera, żeby nie niszczył planet z systemów ich klientów. Dla systemu Euklides pracuje 59 z tych lobbystów, dla systemu Tocjent - 55, dla Petersen - 59, a dla Hamilton - 70. Niektórzy z nich pracują naraz dla dwóch systemów: dla systemów Euklides i Tocjent pracuje 39 lobbystów, dla Euklides i Petersen - 34, dla Euklides i Hamilton - 42, dla Tocjent i Petersen - 31, dla Tocjent i Hamilton - 44, a dla Petersen i Hamilton - 41. Bardziej przedsiębiorczy pracują dla trzech systemów jednocześnie: dla systemów Euklides, Tocjent i Petersen pracuje 25 lobbystów, dla Euklides, Petersen i Hamilton - 26, dla Euklides, Tocjent i Hamilton - 32, a dla Tocjent, Petersen i Hamilton - 25. Ilu lobbystów pracuje naraz dla wszystkich czterech zagrożonych systemów?
2. (400 pkt) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:

$$s_{n+1} = s_n + 12s_{n-1} - 14 \cdot (-3)^n, \quad s_0 = -1, \quad s_1 = 4$$

3. a) (200 pkt) Za pomocą rozszerzonego algorytmu Euklidesa wyznaczyć (lub udowodnić, że nie istnieją) liczby całkowite  $x, y$  takie, że:  $14872x + 13552y = 264$ .
- b) (200 pkt) Rozwiązać układ kongruencji: 
$$\begin{cases} 5x + 4y \equiv_{19} \varphi(1960) \\ 3x - 7y \equiv_{19} 11 \end{cases}$$

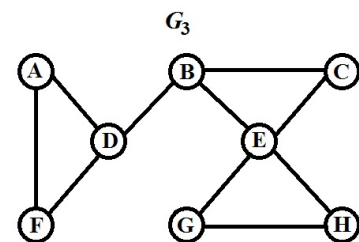
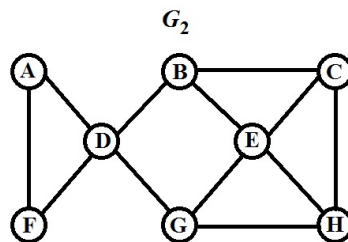
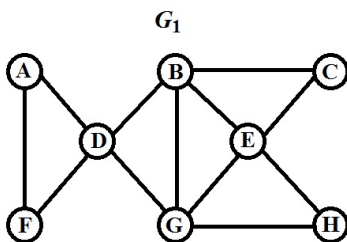
4. (400 punktów) a) Zastosować algorytm Dijkstry ze wskaźnikami do wyznaczenia drogi o najmniejszej wadze pomiędzy wierzchołkami  $A$  i  $H$  poniższego grafu. Przebieg algorytmu zapisać w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać tę drogę i jej wagę.

Nr etapu	Zbiór $L$	$d(B)p(B)$	$d(C)p(C)$	...
----------	-----------	------------	------------	-----



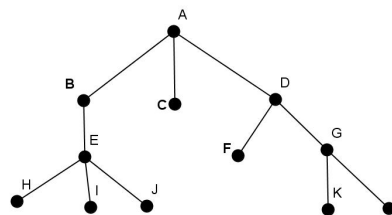
b) Dla każdego z grafów  $G_1, G_2, G_3$  sprawdzić, czy występuje w nim cykl lub droga Eulera. Odpowiedź uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenie. Jeśli dla któregoś z grafów będzie istnieć droga Eulera, ale nie cykl Eulera, wykorzystać algorytm Fleury'ego do znalezienia jednej z tych dróg zapisując przebieg algorytmu w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać odpowiedź w postaci ciągu kolejnych wierzchołków na tej drodze.

Nr etapu	Wybór	Alternatywy
----------	-------	-------------



5. (400 punktów) a) Wyjaśnić pojęcia algorytmu rekurencyjnego i definicji rekurencyjnej i podać po jednym przykładzie takiego algorytmu i takiej definicji.

b) Dla poniższego drzewa  $T$ :



I. Zapisać wierzchołki  $T$  w porządku prefiksowym.

II. Zapisać wierzchołki  $T$  w porządku postfiksowym.

III. Narysować drzewo z wyróżnionym korzeniem, które nie jest izomorficzne z  $T$ , ale ma taki sam zapis jak  $T$  w porządku prefiksowym.

IV. Narysować drzewo z wyróżnionym korzeniem, które nie jest izomorficzne z  $T$ , ale ma taki sam zapis jak  $T$  w porządku postfiksowym.