Przykładowe zadania na trzecim sprawdzianie z algebry:

Nie wszystkie poniższe zadania znajdą się na sprawdzianie (pewnie 7-8 zadań). Niektóre mogą być tylko w jednej grupie, innych w ogóle nie będzie, a inne będą pomieszane. Liczby punktów za każde zadanie są orientacyjne - mogą się nieco zmienić. W każdym razie zadania planuję wybrać z poniższych typów:

1. (300 pkt) Dane są odwzorowania liniowe: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $S(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$, zaś macierz ich złożenia $M_{S\circ T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Zbadać, czy S jest izomorfizmem i wyznaczyć wzór odwzorowania T.

2. (200 pkt) Dane jest odwzorowania liniowe T takie, że $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(1,3) = (1,1,1)$; $T(1,1) = (0,1,-2)$. Obliczyć $T(-1,3)$.

3. (300 pkt) Wiemy, że $M_T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania T obrotu płaszczyzny o kąt θ. Wyznaczyć macierz M_T i kąt φ oraz wzór odwzorowania S, tak, by $m_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta \in [\pi, 2\pi]$, $T \circ S$ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$.

4. (400 pkt) Obliczyć wartości i wektory własne dla macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz ta jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnić i , jeśli jest pozytywna, przedstawić tę diagonalizację.

5. (300 pkt) Poniższą macierz symetryczną A przedstawić w postaci $A = PD_\Lambda P^T$, gdzie P jest macierzą ortogonalną, a D_Λ jest postacią diagonalną macierzy A. Następnie obliczyć A^{10} (w rozwiązaniu mogą się pojawić liczby typu x^{10} - nie trzeba wykonywać potęgowania, jednak proszę o wykonanie wszystkich pozostałych mnożeń).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

6.(250 pkt) Wyznaczyć macierz i zbadać określoność formy kwadratowej zadanej wzorem: $f(x,y,z,v) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 4v^2 + 2xy + 8yv$.

7. (300 pkt) Próbka 7500 komórek została w laboratorium wystawiona na działanie pewnego wirusa i pewnego leku. Badano 3 możliwe stany komórek: zdrowe, zainfekowane i chore. Zaobserwowano, że w ciagu każdej godziny $\frac{1}{3}$ zdrowych komórek stawała się zainfekowanymi, z komórek zainfekowanych $\frac{1}{2}$ zmieniała się w komórki chore, zaś $\frac{1}{6}$ powracała do stanu komórek zdrowych, a z komórek chorych $\frac{1}{4}$ stawała się komórkami zdrowymi (pozostałe komórki pozostawały w tym stanie, w jakim były przy poprzednim pomiarze). Sformułować układ równań dynamiki związanej z tym problemem, wyznaczyć jego macierz przejścia i stan równowagi. Czy stan równowagi tego układu jest jego stanem granicznym? Odpowiedź uzasadnić.

8. (250 pkt) Za pomocą twierdzenia Cayleya-Hamilotona wyznaczyć macierz odwrotną do $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. (300 pkt) Dana jest gospodarka o macierzy przepływów międzygałęziowych: $[y_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ oraz wektorze produkcji końcowej (popytu zewnętrznego): $d = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć macierze współczynników kosztów i Leontiewa dla całego modelu, a następnie zaplanować, jak musi zmienić się globalny produkt, by dostosować się do zmiany popytu zewnętrznego w wysokości $\Delta d_1 = 3$, $\Delta d_2 = 0$.

10. (200 pkt) Znaleźć macierz, której wartości własne to 1 i 4, a wektory własne to $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

11. (250 pkt) Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, wartości własne macierzy B o współczynnikach rzeczywistych to i, $-i$ i -2.

a) Ile wynoszą wartości własne macierzy $B + 3I$?

b) Czy możliwe jest, by B była macierzą symetryczną? Podaj przykład takiej sytuacji lub uzasadnij, czemu to jest niemożliwe.

c) Czy możliwe jest, by wszystkie wartości własne macierzy A były ujemne lub wszystkie wartości własne macierzy A były dodatnie?

d) Jaka jest suma wartości własnych macierzy $A+B$? A jaka jest suma wartości własnych macierzy $(B^2)^{-1}$?

e) Ile wynosi iloczyn wartości własnych macierzy $2A^T$?

12. (100 pkt) Podać przykład izomorfizmu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i uzasadnić, że jest to izomorfizm (lub uzasadnić, dlaczego takie odwzorowanie nie istnieje).

13. (50 pkt) Podać przykład formy kwasdratowej 3 zmiennych x, y, z, która jest dodatnio półokreślona, ale nie dodatnio określona. Jaka jest definicja takich macierzy?

Planowany czas sprawdzianu: 90 minut