Przykładowe zadania na drugim sprawdzianie z algebry:

Nie wszystkie poniższe zadania znajdą się na sprawdzianie, a ich punktacja jest orientacyjna. Niektóre mogą być tylko w jednej grupie, innych w ogóle nie będzie, a inne będą pomieszane. W każdym razie zadania planuję wybrać z poniższych typów (zadanie teoretyczne może też dotyczyć dowolnych innych zagadnień poruszonych na wykładzie):

1. (300 pkt) Obliczyć wyznacznik i ślad macierzy:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. (300 pkt) Wskazać ile maksymalnie można wybrać wektorów liniowo niezależnych spośród:
$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. (200 pkt) Teoria:
Dane są macierze wymiaru 4×4: A,B i C, takie, że $\det A = a$, $\det B = b, \det C = c$. Załóżmy, że macierze A i B są nieosobliwe, a macierz C jest osobliwa. Odpowiedzieć na poniższe pytania (lub wskazać brak danych, jeśli nie da się jednoznacznie podać odpowiedzi).
a) Ile wynosi c? b) Ile wynoszą rzędy macierzy A, B i C? c) Ile wynoszą rzędy i wyznaczniki macierzy $A+B$, AB i BC? d) Ile wynoszą rzędy i wyznaczniki macierzy odwrotnych do A, B, C? e) Ile wynoszą rzędy i wyznaczniki macierzy transponowanych do A, B, C? f) Ile wynoszą wyznaczniki macierzy $-A^T B^{-1}$ oraz $2AB$?
g) Podać warunek konieczny i wystarczający dla macierzy kwadratowej M, by była ona odwracalna.
h) Jaki jest warunek konieczny i wystarczający dla macierzy N, by istniał jej wyznacznik?

4. (400 pkt) Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

5. (400 pkt) Rozwiązać równanie macierzowe ze względu na zmienną X (I jest macierzą jednostkową):
$$3[\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} - (\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + (\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} - 2I) \cdot X)^T] =$$
$$= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^2.$$

6. (150 pkt) Załóżmy, że podane poniżej macierze mają odpowiednio wymiary: B - 2×3, C - 3×2, D - 3×3, G - 4×3, H - 3×4. Przy tych założeniach podać (i uzasadnić) wymiar macierzy X (lub uzasadnić, że macierz X nie istnieje), jeśli: $X = (((D(HG)^{-1}C)^T H)^T B)^T$.

7. (150 pkt) Znaleźć $f(A)$, gdy $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, a $f(X) = X^3 - 2X^2 + 3X - 4I$.

8. (500 pkt) Rozwiązać metodą Gaussa-Jordana układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_6 = -1 \\ x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

9. (300 pkt) Za pomocą metody wyznacznikowej (Kroneckera-Capellego) wyznaczyć liczbę rozwiązań poniższego układu równań, w zależności od parametru k:

$$\begin{cases} [2\log_{10}(k^2-1)]x + 4y + 2z = 0 \\ x + y + [\log_{10}(k^2-1)]z = 0 \\ x + y + [2\log_{10}(k^2-1)]z = 0 \end{cases} .$$