Formy kwadratowe i model Leontiewa przepływów międzygałęziowych.

Zadania na ćwiczenia:

I. Wyznaczyć macierz i zbadać określoność formy kwadratowej zadanej wzorem:
a) $f(x,y,z) = -2x^2 - 5y^2 - 3z^2 - 4xy + 6yz$;
b) $f(x,y,z) = x^2 + 9y^2 + 3z^2 - 6xy$.

II. Dana jest macierz formy kwadratowej. Podać wzór tej formy kwadratowej i zbadać jej określoność:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

.

III. Niech $A \in M(3,3)$, zaś jej wartości własne to $-1, 0, 2$. Które stwierdzenia są prawdziwe? a) Macierz $A^T - 4I$ jest określona ujemnie, b) Suma wartości własnych macierzy $A^T A$ wynosi 5, c) $\det(A(A^T + I)) = 1$, d) Jeśli A jest symetryczna, to wartości własne macierzy $A^T A$ to $0, 1, 4$.

IV. Dla jakich wartości x poniższa macierz jest dodatnio określona?

$$\begin{bmatrix} \log_2 x & 1 & \arcsin x - 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ \arcsin x - 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V. Dana jest gospodarka o macierzy przepływów międzygałęziowych: $[y_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ oraz wektorze produkcji końcowej (popytu zewnętrznego): $d = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć macierze współczynników kosztów i Leontiewa dla całego modelu, a następnie zaplanować, jak musi zmienić się globalny produkt, by dostosować się do zmiany popytu zewnętrznego w wysokości $\Delta d_1 = 3$, $\Delta d_2 = 0$.

VI. Rozważamy gospodarkę złożoną z trzech gałęzi produkcji: węgla, elektryczności i kolei. Wyprodukowanie węgla o wartości 1 dolara wymaga wykorzystania energii elektrycznej o wartości 0,25 dolara i transportu o koszcie 0,25 dolara. Produkcja energii elektrycznej o wartości 1 dolara wymaga zużycia węgla o wartości 0,65 dolara, elektryczności o wartości 0,05 dolara na jego przerób i 0,05 dolara na jego transport. Dostarczenie usługi transportowej o wartości 1 dolara wymaga wykorzystania węgla o wartości 0,55 dolara i energii elektrycznej o wartości 0,1 dolara. Tygodniowy popyt zewnętrzny na węgiel jest na poziomie 50 000 dolarów, na elektryczność zaś na poziomie się 25 000 dolarów. Nie ma ustalonego popytu zewnętrznego na transport kolejowy. Wyznacz tygodniowy plan produkcji dla omawianych gałęzi.

Zadania domowe:

Zadanie 1. Dana jest macierz formy kwadratowej. Podać wzór tej formy kwadratowej i zbadać jej określoność:
a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 2. Wyznaczyć macierz i zbadać określoność formy kwadratowej zadanej wzorem:
a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy$; b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$;
c) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz$;
d) $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{2}{3}xz$;
e) $f(x,y,z,v) = -2x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4v^2 + 2xz + 4xv - 6zv$;
f) $f(x,y,z,v) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 4v^2 + 2xy + 8yv$;

g) $f(x,y) = y^2 + 2xy$;
h) $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4xy + 4xz - 6yz$.

Zadanie 3. Dana jest macierz przepływów międzygałęziowych pewnej gospodarki:

$$[y_{ij}] = \begin{bmatrix} 30 & 30 & 10 \\ 60 & 10 & 20 \\ 15 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

oraz wielkości produktów końcowych $d_1 = 80$, $d_2 = 10$, $d_3 = 10$.
a) Jakie są wartości produkcji całkowitych poszczególnych gałęzi?
b) Znaleźć macierz współczynników kosztów.

Zadanie 4. Dana jest macierz przepływów międzygałęziowych:

$$[y_{ij}] = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 50 \\ 30 & 250 & 0 \\ 0 & 100 & 180 \end{bmatrix}$$

oraz wielkości produktów końcowych $d_1 = 50$, $d_2 = 70$, $d_3 = 20$.
a) Obliczyć o ile wzrośnie wielkość produktów końcowych, jeśli produkcja całkowita wzrośnie odpowiednio o $\Delta x_1 = 30$, $\Delta x_2 = 140$, $\Delta x_3 = 60$.
b) O ile powinny wzrosnąć produkcje całkowite poszczególnych gałęzi, jeżeli zażąda się wzrostu wielkości produktów końcowych w każdej gałęzi odpowiednio o $\Delta d_1 = 20$, $\Delta d_2 = 21$, $\Delta d_3 = 22$.
c) Przy niezmienionych warunkach technologicznych, ustalić plan produkcji całkowitych tak, by gałąź pierwsza wytwarzała produkt końcowy o wartości 30, druga 50, a trzecia 4. Jakie będą wtedy przepływy międzygałęziowe z gałęzi pierwszej?

Zadanie 5. W modelu Leontiewa dane jest:
a) Macierz $Y = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 \end{bmatrix}$ oraz wektor produktów końcowych $d = \begin{bmatrix} 21 \\ 42 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć wektor produkcji globalnej i tabelę przepływów międzygałęziowych. O ile powinna wzrosnąć produkcja globalna, jeśli zażądamy wzrostu wielkości produktów końcowych o $\Delta d_1 = 3$, $\Delta d_2 = 3$?
b) Macierz $Y = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$ i wektor produkcji globalnej $d = \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć wektor produktów końcowych. O ile wzrośnie wielkość produktów końcowych, jeśli produkcja całkowita wzrośnie o $\Delta x_1 = 20$, $\Delta x_2 = 50$, $\Delta x_3 = 30$?
c) Tablica przepływów międzygałęziowych $Y = \begin{bmatrix} 50 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 10 \\ 20 & 50 & 15 \end{bmatrix}$ i wektor produkcji globalnej $x = \begin{bmatrix} 150 \\ 90 \\ 130 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć macierz współczynników kosztów i wektor produktów końcowych.
d) Macierz Leontiewa $L = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Jakie będą wartości produkcji globalnych, gdy wartości produktów końcowych są odpowiednio równe 10 i 20? Jakie będą przepływy z gałęzi pierwszej, gdy produkcja globalna tej gałęzi zmaleje o 10?

Zadanie 6. W modelu Leontiewa dana jest macierz współczynników nakładów $Y = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}$ Jaka będzie zmiana produkcji globalnej (całkowitej) Δx, jeśli zażądamy wzrostu produktów końcowych (eksportowych) o $\Delta d_1 = 50$, $\Delta d_2 = 100$? O ile zmienią się elementy drugiego wiersza tabeli przepływów międzygałęziowych?

Dobrej zabawy!
Grzesiek Kosiorowski