Algebra - zestaw 8

Dyskretna dynamika liniowa

Zadania na ćwiczenia:

I. Dwa sklepy: A i B mają dominującą pozycję na rynku sprzedaży wihajstrów. Wihajstry te kupuje w każdym miesiącu grupa 440 klientów, którzy używają je do produkcji ustrojstw. Co miesiąc, średnio $\frac{1}{3}$ klientów, którzy w poprzednim miesiącu kupowali wihajstry w sklepie A, kupuje teraz w sklepie B. Jednocześnie, średnio $\frac{2}{5}$ klientów, którzy w poprzednim miesiącu kupowali wihajstry w sklepie B, kupuje teraz w sklepie A. Pozostali kupują w tym samym sklepie co wcześniej. Sformułować układ równań dynamiki związanej z tym problemem, wyznaczyć jego macierz przejścia i stan równowagi. Czy stan równowagi tego układu jest jego stanem granicznym? Odpowiedź uzasadnić.

II. Próbka 7500 komórek została w laboratorium wystawiona na działanie pewnego wirusa i pewnego leku. Badano 3 możliwe stany komórek: zdrowe, zainfekowane i chore. Zaobserwowano, że w ciagu każdej godziny $\frac{1}{3}$ zdrowych komórek stawała się zainfekowanymi, z komórek zainfekowanych $\frac{1}{2}$ zmieniała się w komórki chore, zaś $\frac{1}{6}$ powracała do stanu komórek zdrowych, a z komórek chorych $\frac{1}{4}$ stawała się komórkami zdrowymi (pozostałe komórki pozostawały w tym stanie, w jakim były przy poprzednim pomiarze). Sformułować układ równań dynamiki związanej z tym problemem, wyznaczyć jego macierz przejścia i stan równowagi. Czy stan równowagi tego układu jest jego stanem granicznym? Odpowiedź uzasadnić.

III. (Z badań H. Bernadelliego). Osobniki pewnego gatunku chrząszczy żyją co najwyżej trzy lata i rozmnażają się w trzecim roku. Przeżywają pierwszy rok z prawdopodobienstwem $\frac{1}{2}$, drugi z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, a w trzecim mają średnio 6 potomków. Dynamika sterująca populacją chrząszczy jest zadana nastepującą *macierzą chrząszczy*:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pokazać, że $A^3 = I$ i przeanalizować zmiany w populacji chrząszczy w ciągu 6 lat, jeśli wystartujemy od populacji liczącej po 300 chrząszczy w każdym wieku.

Zadania domowe:

Zadanie 1. Niech $A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$. Czy $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$, $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$, $\lim_{k\to\infty} C^k = 0$ (gdzie przez 0 rozumiemy macierz wymiaru 2×2 o wszystkich wyrazach zerowych)?

Czy któraś z tych macierzy jest macierzą Markowa?

Zadanie 2. Badamy epidemię, w której w każdym miesiącu połowa zdrowych zachoruje, trzecia część chorych wyzdrowieje, a czwarta część chorych umrze. Sformułować układ równań dynamiki związanej z tym problemem, wyznaczyć jego macierz przejścia i stan równowagi. Czy macierz przejścia w tym układzie jest macierzą Markowa?

Zadanie 3. Dana jest firma transportowa, mająca 3 bazy: w Warszawie, Krakowie i Wrocławiu i 240 ciężarówek. W każdym miesiącu połowa ciężarówek firmy z Krakowa i Warszawy trafia do Wrocławia (a druga połowa zostaje w swoim mieście). Z kolei połowa ciężarówek z Wrocławia trafia do Krakowa, a połowa do Warszawy. Wyznaczyć macierz przejścia A oraz jej stan równowagi dla tej sytuacji.

Zadanie 4. Międzynarodowa korporacja operuje kapitałem 4 miliardów dolarów w trzech siedzibach: w Ameryce, w Europie i w Azji. Na początku po 2 miliardy znajduje się w Ameryce i w Europie. Każdego roku, połowa „amerykańskich” pieniędzy zostaje na miejscu, a po $\frac{1}{4}$ trafia do Europy i Azji. Natomiast w przypadku Europy i Azji połowa zostaje na miejscu, a połowa trafia do Ameryki.

Znaleźć macierz przejścia tego procesu, wyznaczyć wartości i wektory własne tej macierzy, znaleźć rozkład tej kwoty po 20 latach oraz „w odległej przyszłości” (tj. stan graniczny).

Zadanie 5. W pewnym kraju w 300-osobowym parlamencie wszystkie mandaty dzielą między siebie dwie partie: *Unia Algebraików* oraz *Sojusz Logików*. Wiemy, że co roku $\frac{1}{3}$ posłów Unii Algebraików przenosi się do Sojuszu Logików. Podobnie w każdym roku $\frac{1}{6}$ posłów Sojuszu Logików staje się posłami Unii Algebraików. Dla ilu posłów w Unii Algebraików układ osiąga stan równowagi? Czy jest on stanem granicznym układu?
Zadanie 6. Obywatele Republiki Algebraicznej w liczbie 740 tysięcy co roku jeżdżą na wakacje w góry lub nad morze. W każdym roku $\frac{3}{4}$ osób, które w poprzednim roku jechało w góry, tym razem jedzie nad morze. Jednocześnie $\frac{4}{7}$ osób, które w poprzednim roku były nad morzem, jedzie w kolejnym w góry. Sformułować układ równań dynamiki związanej z tym problemem, wyznaczyć jego macierz przejścia i stan równowagi. Czy stan równowagi tego układu jest jego stanem granicznym? Odpowiedź uzasadnić.
Zadanie 7. Roczne wydatki militarne dwóch nieprzyjaznych państw w roku t wynoszą odpowiednio x_t i y_t. Zmiany wydatków każdego z supermocarstw w każdym roku zależą od budżetu przeciwnika (są większe, gdy przeciwnik dużo wydaje) i od aktualnych własnych wydatków (są zmniejszane, gdy dane państwo wydaje za dużo). Otrzymujemy stąd równania $x_{t+1} = (1-a)x_t + by_t$ oraz $y_{t+1} = cx_t + (1-d)y_t$, gdzie $a, b, c, d \in (0, 1)$. Wyznaczyć macierz przejścia A tej dynamiki. Sprawdzić, że jedynie $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ jest stanem równowagi tego równania. Jednak, by stan równowagi był rzeczywistym rozwiązaniem danego zagadnienia musimy sprawdzić, czy faktycznie możliwe jest, że dla stanu początkowego $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ otrzymamy, że $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ jest stanem granicznym. W szczególności, by zaszło to dla dowolnych stanów początkowych musi być $\lim_{k\to\infty} A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Jakie warunki muszą spełniać a, b, c, d, by tak się zdarzyło? Wskazówka - użyć twierdzenia o sumie i iloczynie wartości własnych.
Wersja łatwiejsza zadania: sprawdzić czy tak się dzieje dla $a = 0,75$, $b = d = 0,5$, $c = 0,25$? A dla $a = 0,25$, $b = c = d = 0,5$?
Zadanie 8. Załóżmy, że gospodarka danego państwa może znajdować się w dwu stanach: ożywienia i recesji. Jeśli w danym roku panuje stan ożywienia, to pozostanie on taki z prawdopodobieństwem p, a zmieni się na recesję z prawdopodobieństwem $1-p$. Jeśli w danym roku panuje stan recesji, to pozostanie on taki z prawdopodobieństwem q, a zmieni się na ożywienie z prawdopodobieństwem $1-q$. Zapisać macierz przejścia tej dynamiki i znaleźć stan równowagi tego układu spełniający warunek: suma współrzędnych tego stanu jest równa 1 (interpretacja takiego stanu równowagi: wektor prawdopodobieństw ożywienia i recesji w jakimś odległym roku). Znaleźć warunek opisujący (w zależności od p i q), kiedy w długim okresie ożywienie jest bardziej prawdopodobne niż recesja.
Wersja łatwiejsza zadania: sprawdzić, co się dzieje (tj. jaki jest wektor prawdopodobieństw ożywienia i recesji) dla $p = 0,7$ i $q = 0,6$ oraz dla $p = \frac{1}{4}$ i $q = \frac{1}{3}$.

Dobrej zabawy!
Grzesiek Kosiorowski