Algebra - zestaw 7

Wartości i wektory własne. Diagonalizacja i potęgowanie macierzy

Zadania na ćwiczenia:

I. Wyznaczyć wartości własne i ich wektory własne dla poniższych macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

II. Dla macierzy A i B z zadania I (korzystając z obliczeń tamtego zadania) wyznaczyć macierze odwrotne za pomocą twierdzenia Cayleya-Hamiltona.

III. Korzystając z wyników zadania I, zdiagonalizować macierze z zadania I (czyli przedstawić w postaci $PD_\Lambda P^{-1}$, gdzie D_Λ jest macierzą przekątniową) i za pomocą tej diagonalizacji obliczyć A^{10} i B^{10} (10 potęgi konkretnych liczb mogą zostać w wyniku, nie trzeba ich obliczać).

IV. Dla macierzy symetrycznej A z zadania I przeprowadzić diagonalizację symetryczną, czyli przedstawić ją w postaci $PD_\Lambda P^T$, gdzie P jest macierzą ortogonalną, a D_Λ jest postacią diagonalną macierzy. Przed przeprowadzeniem diagonalizacji sprawdzić ortogonalność macierzy P. Za pomocą tej diagonalizacji obliczyć A^4.

V. Dla macierzy symetrycznej

$$C = \begin{bmatrix} 0,92 & -1,44 \\ -1,44 & 0,08 \end{bmatrix}$$

przeprowadzić diagonalizację symetryczną, czyli przedstawić ją w postaci $PD_\Lambda P^T$, gdzie P jest macierzą ortogonalną, a D_Λ jest postacią diagonalną macierzy. Przed przeprowadzeniem diagonalizacji sprawdzić ortogonalność macierzy P. Za pomocą tej diagonalizacji obliczyć C^{100} (w rozwiązaniu mogą się pojawić liczby typu x^{100} - nie trzeba wykonywać potęgowania, jednak proszę o wykonanie wszystkich pozostałych mnożeń).

VI. Do wspólnego omówienia: własności wartości i wektorów własnych.

a) Jaka jest relacja pomiędzy wartościami własnymi a wyznacznikiem i śladem macierzy?

b) Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że znamy wartości własne macierzy A. Jak za ich pomocą obliczyć wartości własne macierzy $\alpha \cdot A$, $(A + \alpha I)$, A^{-1} (o ile istnieje), A^n, A^T.

c) Jaki jest warunek wystarczający na to, by wektory własne macierzy A były liniowo niezależne?

d) Jaki jest warunek wystarczający na to, by macierz była diagonalizowalna (czyli, żeby dało się przeprowadzić diagonalizację)?

e) Co możemy powiedzieć o wartościach i wektorach własnych macierzy symetrycznych?

VII. Na podstawie informacji z poprzedniego zadania rozstrzygnąć bez dokładnego obliczania wartości własnych, czy możliwe jest, by wszystkie wartości własne macierzy M były tego samego znaku, gdy:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

.

VIII. Uzupełnić macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ . & . \end{bmatrix}$, jeśli wartości własne macierzy A to 4 i 7.

IX. Wyznaczyć macierz, której wartości własne to 1 i 4, a wektory własne to $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Zadania domowe:

Zadanie 1. Dla poniższych macierzy wyznaczyć ich wartości własne i wektory własne.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Zadanie 2. Dla macierzy z zadania 1, na podstawie obliczeń z tamtego zadania (nie trzeba ich powtarzać) za pomocą równania Cayley'a-Hamiltona wyznaczyć (jeśli to możliwe) macierze odwrotne, zdiagonalizować (przedstawić w postaci $PD_\Lambda P^{-1}$, gdzie D_Λ jest macierzą przekątniową) i obliczyć 7-me potęgi tych macierzy za pomocą tej diagonalizacji (można zostawić w wyniku wyrażenia typu 5^7).

Zadanie 3. Znormalizować kolumny poniższej macierzy do długości 1, a następnie sprawdzić, czy tak zmodyfikowana macierz jest macierzą ortogonalną:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4. Poniższe macierze symetryczne przedstawić w postaci $PD_\Lambda P^T$, gdzie P jest macierzą ortogonalną, a D_Λ jest postacią diagonalną macierzy. Następnie obliczyć 50-te potęgi tych macierzy (w rozwiązaniu mogą się pojawić liczby typu x^{50} - nie trzeba wykonywać potęgowania, jednak proszę o wykonanie wszystkich pozostałych mnożeń).

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} -0,46 & -0,72 \\ -0,72 & -0,04 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5. Pokazać, że wartości własne macierzy mogą się zmienić jeśli od jednego wiersza odejmiemy wielokrotność innego. Uzasadnić, że jeśli $\lambda = 0$ jest wartością własną wyjściowej macierzy, to jest też wartością własną macierzy dowolnej tak powstałej macierzy.

Zadanie 6. Wiemy, że wartości własne macierzy A^T są tożsame z wartościami własnymi macierzy A. Pokazać (podać przykład), że odpowiadające im wektory własne się różnią.

Zadanie 7. Uzupełnić macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ wiedząc, że jej wielomian charakterystyczny ma postać $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$.

Zadanie 8. Niech $A \in M(3,3)$ ma wartości własne $1, 2, 4$. Obliczyć:

a) $\det(A^{-1})^T$.

b) $tr(A^3 - 2A)$.

c) $\det(A - 3I)^4$

Zadanie 9. Bez obliczania wartości własnych wyznaczyć sumę wartości własnych i iloczyn wartości własnych dla macierzy:

a)$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, b)$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, c)$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 10. Korzystając z wzorów Viete'a wskazać wymiar, wyznacznik, rząd i ślad macierzy, której wielomian charakterystyczny ma postać:

$$\varphi(\lambda) = -\lambda^9 + 3\lambda^8 + \lambda^5 + 2\lambda^4 - \lambda + \frac{2}{3}.$$

Zadanie 11. Pokazać, że jeśli A jest macierzą Markowa (czyli suma elementów w każdej kolumnie macierzy jest równa 1), to $\lambda = 1$ jest wartością własną macierzy A.

Zadanie 12. Wyznaczyć macierze o podanych wartościach i wektorach własnych:

a) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
b) $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$, $w_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.
c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 13. Niech A będzie macierzą obrotu płaszczyzny o kąt α. Czy A musi być macierzą ortogonalną? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 14. Niech A będzie takie, że $A^2 = I$.
a) Jakie wartości własne może posiadać A?
b) Zakładając, że A jest macierzą 2×2 oraz $A \neq \pm I$ znaleźć jej ślad i wyznacznik.
c) Jeśli pierwszy wiersz macierzy A jest postaci $\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$, wyznaczyć A.

Zadanie 15. Obliczyć $\sqrt{A}$, jeśli $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Przez $\sqrt{M}$ rozumiemy taką macierz A, że $A^2 = M$.

Dobrej zabawy!
Grzesiek Kosiorowski