Algebra - zestaw 6

Odwzorowania liniowe i ich macierze. Odwzorowania obrotu płaszczyzny.

Zadania na ćwiczenia:

I. Sprawdzić z definicji, czy odwzorowanie T jest liniowe. Jeśli tak, wyznaczyć jego macierz.
a) $T\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x-y+z-3, xyz)$;
b) $T\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+3y, -y, x-y)$.

II. Dane jest odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ takie, że
$T(1,2) = (1,0,1)$; $T(1,1) = (0,1,1)$. Obliczyć $T(2,1)$.

III. Dane jest odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (x+y, 2x-7y)$, zaś macierz odwzorowania liniowego $T \circ S$ to $M_{T\circ S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Sprawdzić, czy T jest izomorfizmem i wyznaczyć odwzorowanie S.

IV. Dane są odwzorowania $T(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, 0)$, $S(x_1,x_2) = (x_1, 2x_1 - x_2)$. Które stwierdzenia są prawdziwe?
a) $M_{T\circ S}$ jest nieosobliwa.
b) rz $M_T = 1$.
c) $S + T$ jest izomorfizmem.
d) odwzorowanie R zadane wzorem $R(x_1,x_2) = T(S(x_1,x_2)) + (1,0)$ nie jest odwzorowaniem liniowym.

V. (do wspólnej dyskusji) a) Pokazać, że obrót płaszczyzny o kąt θ względem początku układu współrzędnych jest odwzorowaniem liniowym. Wyznaczyć macierz takiego odwzorowania.
b) Jakie wartości może przyjąć wyznacznik macierzy obrotu płaszczyzny? Czy obrót płaszczyzny jest izomorfizmem?
c) Niech R_θ oznacza macierz obrotu o kąt $\theta \in [0, 2\pi)$. Czy $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$? Wyznaczyć $R_\theta R_{-\theta}$. Co jest odwzorowaniem odwrotnym do R_θ?

VI. Na ile sposobów da się uzupełnić poniższe macierze, tak, by były macierzami obrotu płaszczyzny? Dla każdej z tych macierzy przedstawić wszystkie możliwe uzupełnienia.
a) $A = \begin{bmatrix} 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \frac{1}{3} & \cdot \end{bmatrix}$.

VII. Czy macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ jest macierzą obrotu płaszczyzny o pewien kąt φ? Jeśli się da, wyznaczyć kąt φ. Ponadto (niezależnie od odpowiedzi na pierwsze pytanie) wyznaczyć wzór odwzorowania liniowego T takiego, że M_T jest macierzą tego odwzorowania i $A \cdot M_T$ jest macierzą obrotu o kąt $\frac{\pi}{4}$.

VIII. Wiemy, że $M_T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania T obrotu płaszczyzny o kąt $\theta \in [\pi, 2\pi]$. Wyznaczyć macierz M_T oraz wzór odwzorowania S, takiego, że $T \circ S$ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$.

Zadanie 1. Sprawdzić z definicji, czy odwzorowanie T jest liniowe, jeśli:
a) $T\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2) = (3x_1 - 2x_2, x_2)$; b) $T\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_3)$;
c) $T\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $T(x_1,x_2) = x_1x_2$; d) $T\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2) = (x_1, 1)$;
e) $T\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_3,x_1,x_2,x_1)$; f) $T\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $T(x_1,x_2) = 5x_1 + x_2$;
g) $T\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_3,x_1,x_2,x_1+x_2+x_3)$,
h) $T\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2) = (x_1+2, x_2)$.
Jeśli odwzorowanie jest liniowe, wyznaczyć jego macierz i sprawdzić, czy to odwzorowanie jest izomorfizmem.

Zadanie 2. Dane jest odwzorowania liniowe T takie, że:
a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(1,3) = (1,1)$; $T(1,1) = (0,1)$. Obliczyć $T(-1,3)$;
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(2,-1) = (1,-1,1)$; $T(-1,0) = (0,1,0)$. Obliczyć $T(-1,2)$.

c) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $T(1,-1,-1)=(1,1)$; $T(2,0,1)=(2,1)$, $T(-2,1,-1)=(-1,0)$. Obliczyć $T(1,-1,-4)$).
d) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T(0,1,2)=(-4,1,0)$; $T(1,0,3)=(2,-1,3)$, $T(-2,1,0)=(1,-3,-4)$. Obliczyć $T(-1,6,-1)$.
Zadanie 3. Wyznaczyć wzór odwzorowania liniowego $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, takiego, że wektory $T(1,0)$, $T(0,1)$ zawierają się w prostej $x_1=x_2$. Sprawdzić, czy jest to izomorfizm.
Zadanie 4. Dla danego odwzorowania liniowego T wyznaczyć jego macierz M_T, sprawdzić, czy jest to izomorfizm, jeśli to możliwe wyznaczyć $M_{T^{-1}}$ i T^{-1}.
a) $T(x,y)=(3x+5y,-x+4x)$; b) $T(x,y,z)=(4x-3y,x+y,5z)$;
c) $T(x,y,z)=(-x+z,4y,x+y-z)$; d) $T(x,y,z)=(2y-2z,4x+2y,x+z)$.
Zadanie 5. Dane są odwzorowania liniowe $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, T(x,y,z)=(5x-y+2z,x)$ oraz $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, S(x,y)=(2x-y,y)$. Sprawdzić, czy któreś z tych odwzorowań jest izomorfizmem i wyznacz macierze oraz wzory możliwych złożeń tych odwzorowań.
Zadanie 6. Dane są odwzorowania liniowe: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ i $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $S(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+2x_3,-x_1+x_3,x_1-x_2+3x_3)$, zaś macierz ich złożenia $M_{S\circ T}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -4\\ 1 & -3\end{bmatrix}$. Wyznaczyć wzór odwzorowania T.
Zadanie 7. Dane jest odwzorowanie liniowe: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ i $T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-3x_2,4x_1+5x_2,7x_3)$, zaś macierz ich złożenia $M_{T\circ S}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$. Wyznaczyć wzór odwzorowania S.
Zadanie 8. Na ile sposobów da się uzupełnić poniższe macierze, tak, by były macierzami obrotu płaszczyzny? Dla każdej z tych macierzy przedstawić wszystkie możliwe uzupełnienia.
a) $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cdot & \cdot\end{bmatrix}$; b) $B=\begin{bmatrix}\cdot & \cdot\\ \frac{3}{2} & \cdot\end{bmatrix}$; c) $C=\begin{bmatrix}\cdot & \frac{1}{2}\\ \cdot & \cdot\end{bmatrix}$; d) $D=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{bmatrix}$; e) $E=\begin{bmatrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$.
Zadanie 9. Czy macierz A jest macierzą obrotu płaszczyzny o pewien kąt φ? Jeśli się da, wyznaczyć kąt φ Ponadto (niezależnie od odpowiedzi na pierwsze pytanie) wyznaczyć wzór odwzorowania liniowego f takiego, że M_f jest macierzą tego odwzorowania i $A\cdot M_f$ jest macierzą obrotu o kąt α:
a) $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{15}}{4}\\ \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$; $\alpha=\frac{5}{4}\pi$;. b) $A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$; $\alpha=\frac{\pi}{3}$;
c) $A=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$; $\alpha=\frac{\pi}{4}$; d) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$; $\alpha=\frac{11\pi}{6}$.
Zadanie 10. Niech Θ będzie odwzorowaniem obrotu płaszczyzny o kąt $\frac{5}{4}\pi$, a $T(x,y)=(2x+y,y-x)$. Sprawdzić, czy T jest odwzorowaniem liniowym, sprawdzić, czy $S=\Theta\circ T$ jest izomorfizmem i wyznaczyć wzór odwzorowania S^{-1}.
Zadanie 11. Wiemy, że $M_T=\begin{bmatrix}m_{11} & -\frac{1}{2}\\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania T obrotu płaszczyzny o kąt $\theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$. Wyznaczyć macierz M_T oraz wzór odwzorowania S, takiego, że $S\circ T$ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{3}$.
Zadanie 12. Preparaty lecznicze 1,2,3 zawierają witaminy A,B i C. Zawartość witamin w każdej tabletce jest następująca: preparat 1: A - 1, B - 2, C - 4 jednostki; preparat 2: A - 1, B - 1, C - 3 jednostki; preparat 3: A - 0, B - 1, C - 1 jednostka. Pacjent ma przyjąć każdego dnia 5 jednostek witaminy A, 13 jednostek witaminy B i 23 jednostki witaminy C. Ile tabletek poszczególnych preperatów powinien codziennie zażyć pacjent? Opisać i rozwiązać to zagadnienie za pomocą rachunku macierzowego.
Zadanie 13. W sklepie „Asymptota” szynka kosztuje 11, ser kosztuje 5, a konserwa rybna 7. W sklepie „Bijekcja” szynka kosztuje 9, ser kosztuje 6, a konserwa rybna 8. W sklepie „Całka” szynka kosztuje 12, ser kosztuje 3, a konserwa rybna 9. Do tych sklepów wybiera się czterech klientów: pierwszy chce kupić 4 szynki, 2 sery i 1 konserwę, drugi -

3 szynki, 3 sery i 2 konserwy, trzeci - 2 szynki i 7 konserw, czwarty - 1 szynkę, 6 serów i 5 konserw. Za pomocą rachunku macierzowego, znaleźć macierz zawierającą koszty zakupów każdego klienta w każdym sklepie i wskazać najbardziej opłacalny wybór dla każdego z klientów.

Zadanie 14. Przedsiębiorstwo produkuje produkty x_1, x_2, x_3 w oddziałach p_1, p_2 z materiałów a, b, c, d. Do wyprodukowania jednostki x_1 potrzeba 11 jednostek a, 20 jednostek b, 5 c i 6 d. Do wyprodukowania jednostki x_2 potrzeba 2 jednostek a, 1 jednostki b, 18 c i 6 d. Do wyprodukowania jednostki x_3 potrzeba 1 jednostki a, 2 jednostek b, 5 c i 0 d. Koszty materiałów w oddziale p_1 wynoszą: a 3, b 2, c 1, d 1. Koszty materiałów w oddziale p_2 wynoszą: a 1, b 2, c 2, d 1. Za pomocą rachunku macierzowego, znaleźć koszty produkcji każdego produktu w każdym z oddziałów.

Zadanie 15. Producent mebli w dwóch fabrykach wytwarza krzesła, stoły i biurka w trzech etapach produkcyjnych: cięcie i łączenie desek oraz wykończenie. Do wyprodukowania krzesła potrzeba 0,6 roboczogodziny cięcia, 0,6 łączenia i 0,2 wykończenia. Do wyprodukowania stołu potrzeba 1 roboczogodzinę cięcia, 0,9 łączenia i 0,3 wykończenia. Do wyprodukowania biurka potrzeba 1,5 roboczogodziny cięcia, 1,2 łączenia i 0,4 wykończenia. W pierwszej fabryce wynagrodzenie za roboczogodzinę cięcia to 60 PLN, za roboczogodzinę łączenia 80 PLN i za roboczogodzinę wykończenia 30 PLN. W drugiej fabryce wynagrodzenie za roboczogodzinę cięcia to 70 PLN, za roboczogodzinę łączenia 100 PLN i za roboczogodzinę wykończenia 40 PLN. Utworzyć macierze czasu pracy i wynagrodzeń, obliczyć i zinterpretować ich iloczyn, wskazać koszt produkcji krzeseł w pierwszej fabryce i stołów w drugiej.

Dobrej zabawy!
Grzesiek Kosiorowski