Analiza - zestaw 7

Monotoniczność, wklęsłość/wypukłość i pełne badanie przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej.

Zadania na ćwiczenia:
I. Znaleźć przedziały monotoniczności oraz wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:
a) $f(x)=\frac{x^2-10}{x^2-2x-3}$, b) $g(x)=x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
II. Zbadać przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji:
a) $f(x)=(x^2-4x+2)e^{2x-2}$, b) $h(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
III. Zbadać przebieg zmienności (czyli wyznaczyć: przedziały monotoniczności i wypukłości, ekstrema, punkty przegięcia oraz asymptoty pionowe i ukośne) i naszkicować wykres następujących funkcji:

$$a)\ f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2+4}};$$

$$b)\ f(x)=\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x.$$

Zadania domowe:
Zadanie 1. Znaleźć przedziały monotoniczności oraz wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x)=x^3+3x^2-9x-2$, ą) $f(x)=4x^3-3x^2-16x+12$, b) $f(x)=x^3+x^2-16x-16$, c) $f(x)=x(x-1)^2$, ć) $f(x)=\frac{3x-1}{2x+1}$, d) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, e) $f(x)=x+2\sqrt{-x}$, ę) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}$, f) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$, g) $f(x)=\cos 2x$, h) $f(x)=e^{1/x}$, i) $f(x)=x\ln x$; j) $f(x)=\frac{e^{-x-1}}{x^2+x}$; k) $f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$; l) $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$; ł) $f(x)=e^{\frac{x^3}{x-1}}$; m) $f(x)=x+\sqrt{1-x}$; n) $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$; o) $f(x)=x^2e^{-3x}$; ó) $f(x)=x2^{\frac{1}{x}}$; p) $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$; q) $f(x)=\cos^2x+2\sin^2x$; r) $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-1}$; s) $f(x)=\ln^3x-\ln x^3$; ś) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; t) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$; u) $f(x)=\sqrt{e^{x^2}-1}$; w) $f(x)=x\operatorname{arctg}x$.
Zadanie 2. Zbadać przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji f oraz wyznaczyć jej punkty przegięcia:
a) $f(x)=x^2+\ln x^2$; b) $f(x)=x^x$; c) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}e^{-x}$;
d) $f(x)=x\ln(x-2)$; e) $f(x)=\frac{x^4}{2-x^3}$; f) $f(x)=\arcsin\frac{1}{x}$.
Zadanie 3. Zbadać przebieg zmienności (czyli wyznaczyć: przedziały monotoniczności i wypukłości, ekstrema, punkty przegięcia oraz asymptoty pionowe i ukośne) i naszkicować wykres następujących funkcji:
a) $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$, ą) $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$, b) $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$, c) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$, ć) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-x-2}$, d) $f(x)=x+\cos x$, e) $f(x)=\ln(e+\frac{1}{x})$, ę) $f(x)=x\operatorname{arctg}x$, f) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$, g) $f(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$, h) $f(x)=\sin x\cos 2x$, i) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$, j) $f(x)=(x-5)^2\sqrt{x}$, k) $f(x)=xe^{-2x}$, l) $f(x)=x^3\ln x$, ł) $f(x)=e^{-x^2}$, m) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\ln(3-2x)+1$, n) $f(x)=\operatorname{arctg}(x-1)-\ln x.$, ń) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-4}$, o) $f(x)=\frac{e^{-x-1}}{x^2+x}$, p) $f(x)=\frac{e^{x^2+1}}{x^2-4}$.
Zadanie 4. Zbadać przebieg zmienności następujących funkcji (ważne w zastosowaniach ekonomicznych):
a) $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2+35x+1}$, b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, c) $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x+1}}$, d) $f(x)=\frac{10x(x-30)}{x+20}$.
Zadanie 5. Dla poniższej funkcji kosztów K od wielkości produkcji x wyznaczyć zbiór poziomów produkcji dla których zysk jest dodatni i maksymalny przy cenie sprzedaży p. Podać maksymalny zysk i punkt przegięcia krzywej kosztów (jeśli istnieje). Zakładamy, że cała produkcja zostanie sprzedana.
a) $K(x)=0,3x^2+50x+108000$, $p=500$; b) $K(x)=0,1x^2+8x+1210$, $p=130$;

c) $K(x) = 0,02x^3 - 3x^2 + 154x + 1280$, $p = 220$; d) $K(x) = 0,002x^3 - 0,4x^2 + 360x + 72000$, $p = 1000$.

Zadanie 6. Mając daną funkcję kosztu przeciętnego produkcji $K_p(x) = x^2 e^{2x+3}$ zbadać, dla jakiej wartości wielkości produkcji x koszt całkowity będzie najmniejszy.

Zadanie 7. W pewnym zakładzie koszt całkowity K_c jest funkcją wielkości produkcji x: $K_c(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 5x$. Przy jakiej wielkości produkcji x koszt przeciętny produkcji jednego artykułu będzie najmniejszy?

Zadanie 8. W przedsiębiorstwie o produkcji jednorodnej zależność kosztu całkowitego od wielkości produkcji x opisuje funkcja $K_c(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 12$, a zależność dochodu od wielkości produkcji funkcja $R(x) = 12x - x^2$. Zbadać w jaki sposób zmienia się zysk przedsiębiorstwa ze zmianą wielkości produkcji.

Zadanie 9. Dana jest funkcja kosztów w zależności od wielkości produkcji $K(x) = \frac{2}{3}x^3 - 7x^2 + 20x$. Popyt x na towar istnieje przy cenie $p(x) = \frac{2}{3}x^2 - x + 2$. Cena jest zawsze dobierana tak, by sprzedać całą produkcję.

a) Znaleźć funkcję kosztu krańcowego, przeciętnego, oraz utargu (przychodu) całkowitego w zależności od wielkości produkcji.

b) Jaka jest funkcja zysku?

c) Dla jakich x koszty krańcowe są ujemne?

d) Dla jakich $x \in [0, 10]$ zysk jest maksymalny? Ile wynosi?

Zadanie 10. Popyt na telewizory w pewnym mieście kształtował się według wzoru $D(t) = \frac{1}{1+2e^{-2t}}$, gdzie t jest czasem wyrażonym w latach. Po jakim czasie tempo **wzrostu** popytu zaczęło spadać? Jak zmieniał się wtedy popyt na telewizory?

Dobrej zabawy!
Grzesiek Kosiorowski