Analiza - zestaw 5

Pochodne - definicja, linearyzacja i interpretacje ekonomiczne.

Zadania na ćwiczenia:

I.Zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x) = |x|e^{-|x-1|}$$

w jej dziedzinie i obliczyć jej pochodne jednostronne w punktach nieróżniczkowalności (jeśli to jest możliwe).

II. (do wspólnej analizy) Jaka jest relacja między ciągłością a różniczkowalnością funkcji? Jak można wygenerować funkcje ciągłe, ale nieróżniczkowalne w zadanym punkcie?

III. Wyznaczyć prostą styczną do krzywej:

a) $y = \log_2 x - \sqrt{x} + 3x^2 - 2x$ w punkcie o pierwszej współrzędnej $x_0 = 4$.

b) $y = e^x$, prostopadłą do prostej $x + y + 7 = 0$.

IV. Obliczyć za pomocą różniczki przybliżoną wartość (z dokładnością do 2 miejsc po przecinku i z założeniem $\pi = 3,14$ i $\ln 2 = 0,69$):

a) $\mathrm{arcctg}(-0,8)$, b) $2^{2,95}$.

V. Wielkość popytu na rowery D w zależności od średniego dochodu na głowę mieszkańca s w pewnym mieście wynosi

$$D(s) = (s^2 + s)e^{-s}.$$

Obliczyć:

a) krańcowy popyt dla średniego poziomu dochodu $s_0 = 3$.

b) elastyczność dochodową popytu dla średniego poziomu dochodu $s_0 = 2$.

VI. W pewnym przedsiębiorstwie **przeciętny** przychód na jednostkę produkcji przy poziomie produkcji x opisuje funkcja $P_p(x) = 600x^{-0,5} + 40 + 200x^{-1}$. Obliczyć dla poziomu produkcji $x_0 = 900$:

a) krańcowy przychód **całkowity**, b) elastyczność przychodu **całkowitego**

i podać interpretację wyników.

VII. Sprawdzić, czy prawo Gossena jest spełnione dla $x > 0$ przez następujące funkcje użyteczności:

a) $u(x) = \sqrt{x} + \ln x$, b) $f(x) = 2^x - x^2$.

Zadania domowe:

Zadanie 1. Zbadać różniczkowalność funkcji f w jej dziedzinie i obliczyć jej pochodne jednostronne w punktach nieróżniczkowalności (jeśli to jest możliwe) gdy:

a) $f(x) = |x^2 - 4|$; b) $f(x) = |\ln x|$; c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{dla } x < 0 \\ 0, & \text{dla } x = 0 \\ \sin x, & \text{dla } x > 0 \end{cases}$.

d) $f(x) = x|x+1|$, e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{2x+2}, & \text{dla } x \neq 1 \\ 1, & \text{dla } x = 1 \end{cases}$.

Zadanie 2. Podać przykład funkcji ciągłej f takiej, że:

a) f jest różniczkowalna wszędzie poza $x = 1$,

b) f jest różniczkowalna wszędzie poza $x = -1$ i $x = 2$.

Udowodnić swoją tezę, sprawdzając z definicji brak różniczkowalności w podanych punktach.

Zadanie 3. Wyznaczyć prostą styczną do krzywej:

a) $y = \frac{2x+1}{3x-1}$ w punkcie o pierwszej współrzędnej $x_0 = 1$,

b) $y = \mathrm{ctg}\, x$ w punkcie o pierwszej współrzędnej $x_0 = \frac{\pi}{4}$,

c) $y = \log_2 x$ w punkcie o pierwszej współrzędnej $x_0 = 2$,

d) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ w punkcie przecięcia tej krzywej z osią odciętych.

e) $y) = x \ln x$ równoległą do prostej $2x - 2y + 3 = 0$;

f) $y = \ln(x^2 - 2)$, prostopadłą do prostej $2x + y + 1 = 0$ (wszystkie możliwości).

Zadanie 4. Obliczyć za pomocą różniczki przybliżoną wartość:
a) $\sqrt{16,02}$, b) $\frac{1}{\sqrt[3]{27,04}}$, c) $\operatorname{arctg} 0,95$,
d) $e^{0,03}$, e) $\cos\frac{11\pi}{45}$, f) $\ln 0,97$.
Zadanie 5. Mając daną funkcję kosztu przeciętnego $K_p(x) = e^x x^{-2}$ wyznaczyć:
a) funkcję kosztu całkowitego K_c,
b) funkcję kosztu krańcowego K_k,
c) wartość kosztu krańcowego w punktach $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 2$ i podać interpretację wyniku,
d) elastyczność w punktach $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 = 3$ i podać interpretację wyniku,

Zadanie 6. Dla funkcji $f(x) = x^2 e^{-4x}$ wyznaczyć
a) funkcję elastyczności funkcji f,
b) elastyczność funkcji f w punktach $x_0 = 1; x_0 = 0.3; x_0 = 0.5$ oraz podać interpretację wyników.
Zadanie 7. Dana jest funkcja całkowitego popytu na chleb: $Q(x) = 100 - x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{x+1}$, gdzie x - cena chleba. Wyznaczyć i zinterpretować popyt krańcowy i elastyczność cenową popytu dla ceny $x = 9$.
Zadanie 8. Wyznaczyć podaż krańcową i elastyczność funkcji podaży $f(x) = xe^{x^2-1}$ dla $x_0 = 2$ i podać interpretację, jeżeli x oznacza cenę produktu.
Zadanie 9. Mając dany zysk przeciętny $Z_p(x) = \ln(2x - 99)$ wyznaczyć zysk krańcowy dla $x = 50$ i podać interpretację, jeżeli x oznacza cenę produktu.
Zadanie 10. W pewnym przedsiębiorstwie **przeciętny** koszt jednostkowy przy poziomie produkcji x opisuje funkcja $K_p(x) = \frac{400}{\sqrt{x}} + 30 - \frac{100}{x}$. Obliczyć dla poziomu produkcji $x_0 = 400$:
a) krańcowy koszt **całkowity**, b) elastyczność kosztu **całkowitego**
i podać interpretację wyników.
Zadanie 11. Sprawdzić, czy prawo Gossena jest spełnione dla $x > 0$ przez następujące funkcje użyteczności:
a) $f(x) = \log_2 x + \frac{x}{x+1}$; b) $f(x) = x + \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$.

Dobrej zabawy!
Grzesiek Kosiorowski