Algebra - zestaw 5

Liniowa niezależność, rząd i twierdzenie Kroneckera-Capellego

---

Zadania na ćwiczenia:

I. Sprawdzić z definicji, czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne. Podać wymiar przestrzeni generowanej przez te wektory i ustalić, czy tworzą one bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, do której należą. Jeśli układ wektorów jest liniowo zależny, zapisać jeden z wektorów jako kombinację liniową pozostałych:

a)$(1,3)$; $(-2,2)$; $(5,-1)$.

b)$(1,3,0)$; $(0,-2,2)$; $(1,0,-1)$.

II. Obliczyć rząd macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

III. (do wspólnej analizy) Co się dzieje z rzędem macierzy A, gdy:

a) do wiersza (lub kolumny) dodamy wielokrotność innego wiersza (kolumny);

b) wszystkie elementy dowolnego wiersza (lub kolumny) macierzy pomnożymy przez liczbę λ;

c) Zamienimy miejscami dwa wiersze (lub kolumny) macierzy;

d) transponujemy macierz A;

e) usuniemy z macierzy A wiersz lub kolumnę złożoną z samych zer;

f) usuniemy z macierzy A wiersz i kolumnę złożone z samych zer za wyjątkiem liczby będącej na ich przecięciu, która jest niezerowa?

IV. Zbadać za pomocą rzędu liniową niezależność wektorów (tj. podać, ile spośród tych wektorów jest liniowo niezależnych):

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

V. Dane są macierze wymiaru 4×4: A,B i C, takie, że $\det A = a$, $\det B = b, \det C = c$. Załóżmy, że macierze A i B są nieosobliwe, a macierz C jest osobliwa. Odpowiedzieć na poniższe pytania (lub wskazać brak danych, jeśli nie da się jednoznacznie podać odpowiedzi).

a) Ile wynosi c? b) Ile wynoszą rzędy macierzy A, B i C? c) Ile wynoszą rzędy i wyznaczniki macierzy $A+B$, AB i BC? d) Ile wynoszą rzędy i wyznaczniki macierzy odwrotnych do A, B, C? e) Ile wynoszą rzędy i wyznaczniki macierzy transponowanych do A, B, C? f) Ile wynoszą wyznaczniki macierzy $-A^T B^{-1}$ oraz $2AB$?

VI. Rozstrzygnąć (bez rozwiązywania), w zależności od parametru k, ile rozwiązań mają poniższe układy równań liniowych. k nie jest niewiadomą w tych układach!

a) $\begin{cases} x + (k-3)y = 1 \\ (k+4)x - 6y = 3k \end{cases}$;

b) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$.

Zadania domowe:

Zadanie 1. Sprawdzić z definicji, czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne. Podać wymiar przestrzeni generowanej przez te wektory ustalić, czy tworzą one bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, do której należą. Jeśli układ wektorów jest liniowo zależny, zapisać jeden z wektorów jako kombinację liniową pozostałych:

a) $x = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}4\\12\end{bmatrix}$; b) $x = \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix}-1\\4\\0\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$;

c) $x = \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix}2\\6\\0\end{bmatrix}$; d) $x = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\-1\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix}0\\4\\-1\\-1\end{bmatrix}$;

e) $x = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\2\end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix}-1\\-3\\1\\-3\end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}$.

Zadanie 2. Obliczyć rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 1 & 3\\0 & 1 & 3 & 4 & 5\\0 & 2 & 3 & 1 & 8\end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\5 & 4 & 3\\4 & 3 & 2\end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 1\\-1 & -1 & -1 & 1\\-2 & -2 & 1 & 3\\0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix}1 & -6 & -2 & 1 & 1 & 1\\3 & -12 & -6 & 1 & 1 & 3\\1 & 4 & -1 & 1 & 0 & -1\\0 & 5 & 1 & -1 & 0 & -1\\0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

Zadanie 3. Zbadać liniową niezależność wektorów (tj. podać, ile spośród tych wektorów jest liniowo niezależnych) za pomocą rzędu. Podać wymiar przestrzeni generowanej przez te wektory i ustalić, czy tworzą one bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, do której należą:

a) $x = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}4\\12\end{bmatrix}$; b) $x = \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix}-1\\4\\0\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$;

c) $x = \begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix}2\\6\\0\end{bmatrix}$; d) $x = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\-1\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix}0\\4\\-1\\-1\end{bmatrix}$;

e) $x = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\2\end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix}-1\\-3\\1\\-3\end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}$.

Zadanie 4. Wyznaczyć wartości parametru a, dla których $x = \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix}5\\a\end{bmatrix}$ tworzą układ wektorów liniowo niezależnych.

Zadanie 5. Pokazać, że wektory

$$x^1 = \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{1,n-1}\\a_{1n}\end{bmatrix},\ x^2 = \begin{bmatrix}0\\a_{22}\\\vdots\\a_{2,n-1}\\a_{2n}\end{bmatrix},\ldots,x^n = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\a_{nn}\end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne w $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{ii} \neq 0$ dla każdego $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Zadanie 6. Udowodnić, że dwa wektory stanowią układ liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy są do siebie proporcjonalne.

Zadanie 7. Bez rozwiązywania, za pomocą twierdzenia Kroneckera-Capellego sprawdzić, czy poniższe układy równań mają rozwiązania (i ile):

a) $\begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ -3x + 2y = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + 6y - 2z = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x + 4y + 10z = 8 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 4x + 5y - 6z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ 2x + 3y - 3z = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y + 2z - w = 1 \\ 5x + y - 2z + w = 5 \\ x + y - 2z + w = 1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ x - 2y + z - w = -1 \\ x - 2y + z + 5w = 5 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x - z = 1 \\ x + y = 2 \\ y + 2z = 4 \\ z - w = 1 \end{cases}$; h) $\begin{cases} x + y + z + t = -2 \\ -x + y - z - t = 0 \\ x - y - z - t = 1 \\ 2x - y - z - 3t = -1 \end{cases}$; i) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$;

j) $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ 2x + 3y - 4z + 5w = 2 = 2 \\ 3x + 4y - 3z + 6w = 0 \end{cases}$; k) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$; l) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$.

Zadanie 8. Rozstrzygnąć (bez rozwiązywania), w zależności od parametru k, ile rozwiązań mają poniższe układy równań liniowych. k nie jest niewiadomą w tych układach!

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ kx + y + z = 2 \\ x + y + kz = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (k-2)x + (2-k)y = 3k - 6 \\ (2k^2 - 8)x - (3k-6)y = 10 - 5k \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x - (k+1)y = 6 \\ kx - y = k - 1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x + y = k \\ 2x - y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} -kx + 6y - 3z = 2 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 4x + 5y + kz = 3 \\ 7x + 8y + \frac{3}{2}kz = 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} [2\log_{10}(k^2-1)]x + 4y + 2z = 0 \\ x + y + [\log_{10}(k^2-1)]z = 0 \\ x + y + [2\log_{10}(k^2-1)]z = 0 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ x + y + z = k \\ x + y + 4z = 0 \\ 2x + 2y + 5z = 1 \end{cases}$; i) $\begin{cases} (k-2)x + 2y = k \\ 3x + (k-1)y = 1 \end{cases}$.

Zadanie 9. Udowodnić, że $rzAB \leq \min\{rzA, rzB\}$ (łatwiejszy przypadek: dla macierzy kwadratowych).