Funkcje elementarne i ich własności, elementarne nierówności

Zadania na ćwiczenia:
0. (do wspólnego opracowania) Sprawdzić, czy $f: X \to Y$ jest funkcją, a jeśli tak, to czy surjekcją, injekcją i bijekcją?
a) $X = Y = \mathbb{R}, y = f(x) \Leftrightarrow y = \cos x$;
b) $X = Y = \mathbb{R}, y = f(x) \Leftrightarrow y^2 = x^4$.
Jeśli odpowiedź na któreś z pytań jest negatywna, to jak można poprawić dziedzinę i przeciwdziedzinę, by odpowiedź stała się pozytywna?
I. Sprowadzić do najprostszej postaci wyrażenia:
a) $\ln \frac{x+3}{x^2-49} + \ln \frac{x-7}{x^2-9}$; b) $\frac{3x^7+2\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{x^2}}{x\sqrt{x}}$;
c) $\sin(\arccos(1)) - \cos(\mathrm{arcctg}(0)) + \mathrm{arctg}(\sin(\frac{\pi}{2}) - \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.
II. Rozwiązać nierówności:
a) $3^{\frac{x^2-1}{x+5}} < 81$; b) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2-16} > \frac{1}{8}$; c) $\arccos(2^x - 1) < \frac{\pi}{6}$, d) $(\frac{1}{3})^{\mathrm{arcctg}(1-x)} \geq 3^{-\frac{3\pi}{4}}$.
III. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:
a) $f(x) = \arcsin[(3x+1)^{\frac{1}{2}}]$, b) $f(x) = \sqrt{\mathrm{arctg}(\log_{\frac{1}{5}} x) - \frac{\pi}{4}}$;
IV. Wyznaczyć wzory funkcji rzeczywistych (o ile istnieją) $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1}, gdy:
a) $f(x) = -4x + 5$; $g(x) = 5x + 1$; b) $f(x) = 2^{x-1}$; $g(x) = \arccos(x - \pi)$.
V. Pomijając badanie dziedziny i przeciwdziedziny, wyznaczyć wzór funkcji odwrotnej do:

$$f(x) = \cos(\log_4 x^3 - 3) + 5.$$

VI. Zmniejszyć dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji, tak, by była bijekcją z dziedziny na przeciwdziedzinę, a następnie podać wzór funkcji do niej odwrotnej dla tak wybranej dziedziny i przeciwdziedziny:

$$f(x) = 2^{\sin(7x-2)}.$$

Zadania domowe:
Zadanie 1. Naszkicować wykresy następujących funkcji rzeczywistych (ustalając najpierw ich dziedziny):
a) $f(x) = \arccos 3x$; b) $f(x) = \mathrm{arcctg}(x-1)$; c) $f(x) = \sin \frac{1}{3}x + 1$; d) $f(x) = (\frac{1}{2})^{x-3}$;
e) $f(x) = \log_2(2x+1)$.
Zadanie 2. Sprowadzić do najprostszej postaci:
a) $\log_2 4 + \log_4 8$; b) $\log_{10} 100 - \ln e^2$; c) $\ln x^2 - \ln x^3$; d) $\ln[(x+2)(x-2)]$-$\ln(x-2)$;
e) $\ln \frac{x^2-1}{x^2-4} - \ln \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$; f) $\frac{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}}$; g) $\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}-1}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-1}$; h) $\frac{\sin(25\pi)+\cos(-12\pi)}{\mathrm{tg}(2008\pi)-\sin(-\frac{25}{2}\pi)}$;
i) $\frac{2^3 2^{17}+4^{10}}{8^{10}}$; j) $\frac{x^2-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$; k) $\frac{1}{2}2^{2x-1}4^{y+1}$; l) $2\arcsin(-1) - 2\arccos(0) + 4\,\mathrm{arctg}(-1) + \mathrm{arcctg}\sqrt{3}$;
ł) $\arcsin(\cos(\mathrm{arctg}(0)))$; m) $\cos(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos(-\frac{1}{2}))$.
Zadanie 3. Naszkicować wykresy następujących funkcji:
a) $f(x) = x^2 - 4x - 3$; b) $|f(x)|$; c) $f(|x|)$; d) $|f(|x|)|$.
Zadanie 4. Rozwiązać następujące równania i nierówności:
a) $x^3 + x^2 \leq x$; b) $x^5 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 9 \leq 5x^4$; c) $x^6 + 4x^5 + x^4 + 6 > 7x^3 + 4x^2 + x$;
d) $\frac{3}{x+1} > \frac{2}{x^2-4}$; e) $\frac{50x-97}{x-2} \leq 49$; f) $\frac{x+3}{x+1} + \frac{2}{x} \geq \frac{x+7}{x+3}$; g) $2^{\sqrt{x+1}} < 32$; h) $(\ln x)^3 \geq 27$;
i) $\log_{\frac{1}{3}}(x^{-2} - 7) > -2$; j) $|3x - 9| < |x + 9|$; k) $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} \geq 1$; l) $\log_2 \frac{5x-15}{x-4} < 2$;
ł) $\mathrm{arctg}(x^2 - x) = \frac{\pi}{4}$; m) $\arcsin(\ln x) > 0$; n) $6\,\mathrm{arcctg}(x^2 - 1) > \pi$; o) $\arcsin(\log_{\frac{1}{2}} x) \geq \frac{\pi}{6}$;
p) $|\arcsin 2x| \geq \frac{\pi}{3}$; q) $\log_{\pi^{-1}}(\arccos(x^2 + 4x + 2)) + 1 > 0$.
Zadanie 5. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:
a) $f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2)$; b) $f(x) = \ln(\sin\frac{\pi}{x})$;
c) $f(x) = \log_2(\frac{\pi}{3} - \arccos(\frac{1}{4})^x)$; d) $f(x) = \ln[(16 - x^2)(\mathrm{arctg}\, x)]$;
e) $f(x) = (2^x - 3^x)^{\frac{1}{2}}$; f) $f(x) = [(\arcsin x)(\arccos x)]^{-1} + \log_{10}(-x^2 + x + 2)$;

g) $f(x) = \arcsin(x^2 - 2x)$; h) $f(x) = \arccos \log_{\sqrt{3}} x$.

Zadanie 6. Dla poniższych par relacji popytu i podaży narysować ich wykresy walrasowskie (w układzie współrzędnych (p, q)) i marshallowskie (w układzie (q, p)), wyznaczając ich relacje (funkcje) odwrotne D^{-1} i S^{-1}.

a) $D = \{(p, q) : q = 20 - 4p, p, q \geq 0\}$, $S = \{(p, q) : q = 4 + 2p, p, q \geq 0\}$;

b) $D = \{(p, q) : q = 12 - 4p, p, q \geq 0\}$, $S = \{(p, q) : q = 3 + p, p, q \geq 0\}$;

c) $D = \{(p, q) : q = 15 - p^2 - 2p, p, q \geq 0\}$, $S = \{(p, q) : q = p^3 - 3, p, q \geq 0\}$.

d) $D = \{(p, q) : q = \frac{10}{p+1}, p, q \geq 0\}$, $S = \{(p, q) : q = \sqrt{p - 1}, p, q \geq 0\}$.

Zadanie 7. Wyznaczyć (o ile istnieją) funkcje rzeczywiste $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1}, gdy:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = -x$; b) $f(x) = |x - 2| + |x - 1|$; $g(x) = (\frac{1}{3})^x$;

c) $f(x) = -\arccos x$; $g(x) = \frac{1}{x^2}$; d) $f(x) = 2^x$; $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Zadanie 8. Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji podanej, w razie potrzeby zmniejszając dziedzinę tak, by funkcja była odwracalna:

a) $f(x) = 2^x + 1$; b) $f(x) = 5 - x^2 - 4x$; c) $f(x) = 5 + \frac{1}{x+3}$;

d) $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$; e) $f(x) = \operatorname{arcctg}((\frac{1}{3})^x)$; f) $f(x) = 2\log_3(\frac{1}{2}x + 1)$.

Zadanie 9. Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji podanej w jej dziedzinie (nie sprawdzać dziedziny i przeciwdziedziny:

a) $f(x) = (\ln \arcsin x - 7)^4$; b) $f(x) = \sin(3 \operatorname{arctg} x + 4)$;

c) $f(x) = e^{4\sqrt{x}+2}$; d) $f(x) = \sqrt{\log_3(\cos(6^x - 1) + 1)}$.

Dobrej zabawy!

Grzesiek Kosiorowski