Ciągłość funkcji

Zadania na ćwiczenia:
0 (do przemyślenia wspólnego) Czy suma dwóch funkcji, które są ciągłe w punkcie a może nie być ciągła w punkcie a? Czy suma dwóch funkcji, które nie są ciągłe w punkcie a może być ciągła w punkcie a?
I. Zbadać ciągłość funkcji f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}, & \text{dla } x \le 0 \\ \left(2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}\right)^x, & \text{dla } 0 \le x \le 1 \\ (2x-1)^{\frac{1}{x^2-1}}, & \text{dla } x > 1 \end{cases}.$$

II. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f jest ciągła w x_0?

a) $$h(x) = \begin{cases} \frac{ax^2-2ax+a}{x^2-1}, & \text{dla } x > 1 \\ ?, & \text{dla } x = 1;\ x_0 = 1. \\ \frac{cx-1}{x^2+1}, & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} x + \left(\frac{1}{\arcsin(\frac{x}{2})}\right)^{\log_3(1-x)}, & \text{dla } x < 1 \\ a, & \text{dla } x = 1, \\ \frac{x^2+(b-1)x-b}{2x^2+3x-5}, & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

III. (do przemyślenia wspólnego) Korzystając z twierdzenia Weierstrassa udowodnić, że jeśli funkcja samopoczucia osoby konsumującej pączki w Tłusty Czwartek w zależności od ilości zjedzonych pączków jest ciągła i jeśli ta osoba generalnie lubi pączki, to istnieje optymalna ilość pączków, którą ta osoba powinna skonsumować, żeby czuć się jak najlepiej.
IV. Korzystając z twierdzenia Darboux wskazać przedział o długości 1 (najlepiej taki, którego końcami są liczby całkowite), taki, że dane równanie posiada co najmniej jedno rozwiązanie w tym przedziale:
a) $x^3 + 2x^2 + 3 = x$, b) $3^x = 2x^3 + 3x^2 + x + 25$.

Zadania domowe:
Zadanie 1. Zbadać ciągłość funkcji f:

a) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & \text{dla } x < -1 \\ x^2 - 3, & \text{dla } x \ge -1 \end{cases};$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+2}, & \text{dla } x \ne -2 \\ 3, & \text{dla } x = -2 \end{cases};$$

c) $$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{dla } x \le 0 \\ x^2 - 1, & \text{dla } x > 0 \end{cases};$$

d) $$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{dla } x < 0 \\ (x-1)^2, & \text{dla } 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, & \text{dla } x > 2 \end{cases};$$

e) $$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{dla } 0 < |x| < 2 \\ 4, & \text{dla } |x| > 2 \\ 2, & \text{dla } x \in \{0, 2\} \end{cases};$$

f) $$f(x) = \begin{cases} 2^x + 3, & \text{dla } x \le 0 \\ (x-2)^2, & \text{dla } x > 0 \end{cases}.$$

Zadanie 2. Jaką wartość muszą przyjmować parametry a,b,c, i jaką wartość mają odpowiednie symbole „?”, by funkcje f, g, h, k, l, m, n były ciągłe?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{ax}, & \text{dla } x > 0 \\ ?, & \text{dla } x = 0 \\ \frac{(a+1)x^2+2x}{x(x+1)}, & \text{dla } x < 0 \end{cases}.$

b) $g(x) = \begin{cases} \log_2(x+4), & \text{dla } x > 0 \\ ?, & \text{dla } x = 0 \\ (1+bx)^{\frac{1}{x}}, & \text{dla } x < 0 \end{cases}.$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+(a-4)x-2a}{x^2-9x+14}, & \text{dla } x < 2 \\ b, & \text{dla } x = 2,; \\ 2^{\frac{\operatorname{arctg}(\log_2(x-2))}{\pi}}, & \text{dla } x > 2. \end{cases}$

d) $k(x) = \begin{cases} ax^2 - x, & \text{dla } x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}}, & \text{dla } x > 2 \end{cases}.$

e) $l(x) = \begin{cases} (\sqrt[x]{3} + \sqrt[x]{5})^x, & \text{dla } x > 0 \\ ae^x + 1, & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}.$

Zadanie 3. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa udowodnić, że wśród prostokątów wpisanych w trójkąt równoboczny o boku a istnieje taki, który ma największe pole z nich wszystkich.

Zadanie 4. Korzystając z twierdzenia Darboux wskazać przedział o długości 1 (najlepiej taki, którego końcami są liczby całkowite), taki, że dane równanie posiada co najmniej jedno rozwiązanie w tym przedziale:

a) $\sin \frac{\pi x}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$; b) $x^2 - 5 = 0$;
c) $x^3 = 4x^2 + 9x + 15$; d) $x^3 + 6x^2 + 7x + 5 = 0$;
e) $x^3 - 2x^2 + x = 4$; f) $2x^3 + 60x + 18 = 21x^2$;
g) $e^x - 1 = \frac{3}{2(x+1)}$; h) $x^3 + 6x = 5x^2 + 20$; i) $x^5 + x^2 = x^4 + 2$.

Zadanie 5. Korzystając z twierdzenia Darboux udowodnić następujące twierdzenie o naleśniku z dżemem: Dany jest naleśnik (dla uproszeczenia: zakładamy, że jest całkowicie płaski i ma kształt koła bez dziur - ale bez tych założeń twierdzenie i tak by działało). Na naleśniku w dowolny sposób rozkładamy dżem. Teza: naleśnik z dżemem da się przekroić jednym cięciem noża (czyli linią prostą) tak, by po obu stronach cięcia było tyle samo naleśnika i tyle samo dżemu.

Dobrej zabawy!
Grzesiek Kosiorowski