Granice funkcji

Zadania na ćwiczenia:

I. Obliczyć lub uzasadnić, że nie istnieją granice funkcji (również jednostronne, gdy funkcja nie ma granicy):

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5\sqrt{x^3}-\frac{1}{x})^{\operatorname{arctg}x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2^{\frac{1}{x}}-3)}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to\pi}(\frac{1}{2})^{\operatorname{ctg}x}$.

II. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x)=\frac{6x^3-13x^2+x+2}{3x^2+10x+3}$ i obliczyć jej granice na końcach przedziałów określoności.

III. Obliczyć lub uzasadnić, że nie istnieją granice funkcji (również jednostronne, gdy funkcja nie ma granicy):

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}-3x^2}{\sqrt[4]{x^8+x^3+2}+x^2+4x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{2x+1}-7}{9^x+4\cdot 5^x}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+3x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3-1}{x^3+x+1})^{3x^3-1}$, e) $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-x-1)^{\frac{1}{x^2-4}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos(\frac{x+2}{2x+1})^{2x}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{10^{x-2}+9^{x-1}+8^x}$; i) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt[x]{7}+\sqrt[x]{2})^x$; j) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x\operatorname{arcctg}x$.

IV. Sprawdzić, że symbole nieoznaczone faktycznie są nieoznaczone, czyli podać przykłady funkcji f_1, f_2, f_3 i g_1, g_2, g_3 oraz $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ (w otoczeniu x_0 przykładowe funkcje nie powinny być stałe), takich, że:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0}g_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_3(x)=\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)-g_1(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)-g_2(x)=0$ i $\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)-g_3(x)=a\in(0,\infty)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[\infty-\infty]$ jest symbolem nieoznaczonym.

b) $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0}g_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_3(x)=0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)\cdot g_1(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)\cdot g_2(x)=0$ i $\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)\cdot g_3(x)=a\in(0,\infty)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[\infty\cdot 0]$ jest symbolem nieoznaczonym.

c) $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)=0$ i $\lim\limits_{x\to x_0}g_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_3(x)=0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=0$ i $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_3(x)}{g_3(x)}=a\in(0,\infty)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[\frac{0}{0}]$ jest symbolem nieoznaczonym.

d) $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)=1$ i $\lim\limits_{x\to x_0}g_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_3(x)=\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)^{g_1(x)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)^{g_2(x)}=0$ i $\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)^{g_3(x)}=a\in(0,\infty)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[1^\infty]$ jest symbolem nieoznaczonym.

e) $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)=0$ i $\lim\limits_{x\to x_0}g_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_3(x)=0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)^{g_1(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)^{g_2(x)}=0$ i $\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)^{g_3(x)}=a\in(0,1)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[0^0]$ jest symbolem nieoznaczonym.

f) $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0}g_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g_3(x)=0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)^{g_1(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)^{g_2(x)}=\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)^{g_3(x)}=a\in(1,\infty)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[\infty^0]$ jest symbolem nieoznaczonym.

Zadania domowe:

Zadanie 1. Obliczyć lub uzasadnić, że nie istnieją granice funkcji (również jednostronne, gdy funkcja nie ma granicy):

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(\operatorname{tg}(\pi x)+\operatorname{ctg}(\pi x))$, d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(-x)\operatorname{arctg}x$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\log_2(\operatorname{arcctg}\frac{1}{x})$, g) $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\operatorname{arcctg}x}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{\operatorname{arcctg}x}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arcctg}x}{e^x}$,

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\ln x}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}(\log_3 x)^{17x^2+30-\sqrt{x^5}}$, l) $\lim\limits_{x\to 2}x^{\ln(2x-4)}$, m) $\lim\limits_{x\to 1}(\operatorname{ctg}(\pi x))^{\frac{1}{x-1}}$.

Zadanie 2. Wyznaczyć dziedzinę funkcji f i obliczyć granice f na końcach jej przedziałów określoności, gdy:
a) $f(x) = 3x^2 - x^3 + 200$; b) $f(x) = \frac{x-2}{8-x^3}$;
c) $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$; d) $f(x) = \frac{x^3-8x^2+16x}{4+3x-x^2}$;
e) $f(x) = \frac{2x^2-2x+4}{x^2+3x+2}$; f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$.
g) $f(x) = \frac{2x^2-x-3}{4x^2+2x-2}$; h) $f(x) = \frac{7x^2-5}{x^3-7x+6}$.
Zadanie 3. Obliczyć lub uzasadnić, że nie istnieją granice funkcji (również jednostronne, gdy funkcja nie ma granicy):
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln \frac{3x+1}{x^3-2}$, ą) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7x+x^{\frac{3}{2}}+2}{(x+1)\sqrt{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to0} \ln \frac{\ln(1+10x)}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;
ć) $\lim\limits_{x\to3^+} (\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-3})^{\log_2(x^2-2x-3)}$, d) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x^2+2}{x^2-3})^{2x^2}$, ę) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$;
f) $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$, g) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x \sin x$, h) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+4x^2} - x$, i) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{2\operatorname{arctg} x}{\pi})^{\frac{1}{2\operatorname{arctg} x-\pi}}$;
j) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{(x^2+3)(\sqrt{x}-1)}{(x+1)(x-6)(\sqrt{x}+3)}$, k) $\lim\limits_{x\to2+} \sqrt[x-2]{\frac{x^2-x-2}{3x^2-9x+6}}$, l) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x+\operatorname{arcctg} x}{x})^x$, ł) $\lim\limits_{x\to0} \frac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2}$;
m) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x+1}$, n) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}$, ń) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{3x^2+2x-5} - x\sqrt{3}$,
o) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
ó) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+5x} - 2x$, p) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3\cdot2^{2x+2}-10}{5\cdot4^{x-1}+13\cdot3^x}$, q) $\lim\limits_{x\to\infty} ((\frac{2}{3})^x + (\frac{3}{4})^x)^{\frac{2}{x}}$, r) $\lim\limits_{x\to-1^+} \sqrt[x+1]{x+2}$.

Dobrej zabawy!
Grzesiek Kosiorowski