

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut. Nikt nie wychodzi w ciągu ostatnich 10 minut.
 2. Podczas egzaminu wolno korzystać jedynie z kalkulatora, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od prowadzących egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno mieć przy sobie własnych kartek i żadnych narzędzi umożliwiających kontakt ze światem zewnętrznym.
 3. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu.
 4. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.
-

Zadania:

1. (400 punktów) Na mistrzostwa świata w rysowaniu grafów zgłosiło się 281 zespołów. Przypisano im wszystkie kolejne numery od 3612 do 3892.

a) W pierwszej rundzie każda drużyna rysowała jeden graf. Drużyny o numerach podzielnych przez 6 rysowały grafy eulerowskie, drużyny o numerach podzielnych przez 7 rysowały grafy hamiltonowskie, a drużyny o numerach podzielnych przez 8 rysowały grafy dwudzielne. Ile drużyn rysowało grafy, które były eulerowskie, hamiltonowskie lub dwudzielne?

b) Na nagrody za poszczególne osiągnięcia przeznaczono 5000 identycznych pucharów. Na ile sposobów te puchary można rozdzielić pomiędzy zespoły, jeśli wiadomo, że każdy z zespołów zdobył co najmniej 3?

c) Zespoły podzielono na 14 grup eliminacyjnych oznaczonych kolejnymi literami alfabetu łacińskiego: od A do N - w 13 z nich było 20 zespołów, a w czternastej pozostałe. Na ile sposobów można wylosować te grupy jeśli założymy, że ważny jest tylko sam podział zespołów na grupy, a nie kolejność zespołów w każdej konkretnej grupie?

d) Na rundę finałową sędziowie przygotowali 12 grafów typu I, 22 grafy typu II, 27 grafów typu III i 30 grafów typu IV. Każda drużyna losowała najpierw 3 różne grafy typu I, które musiała narysować po kolei (czyli kolejność ich wylosowania była istotna), a następnie 17 różnych grafów z pozostałych typów, które mogła rysować w dowolnej kolejności (a więc kolejność losowania nie ma znaczenia), przy czym musiała wylosować dokładnie 9 grafów typu IV i co najwyżej 3 grafy typu II. Ile istnieje różnych możliwych układów grafów wylosowanych przez jedną drużynę?

2. a) (250 pkt) Za pomocą zasady indukcji matematycznej wykazać, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n liczba $3^{n+1} + 7^n$ dzieli się przez 4.

b) (150 pkt) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:

$$s_{n+1} = 8s_n - 16s_{n-1}; s_0 = 3, s_1 = 4.$$

3. a) (200 pkt) Dla klucza publicznego $(145, 5)$ w systemie RSA wyznaczyć klucz prywatny, a następnie obliczyć, jaka jednostka tekstu jawnego zostanie odszyfrowana z jednostki szyfrogramu o numerze 3.

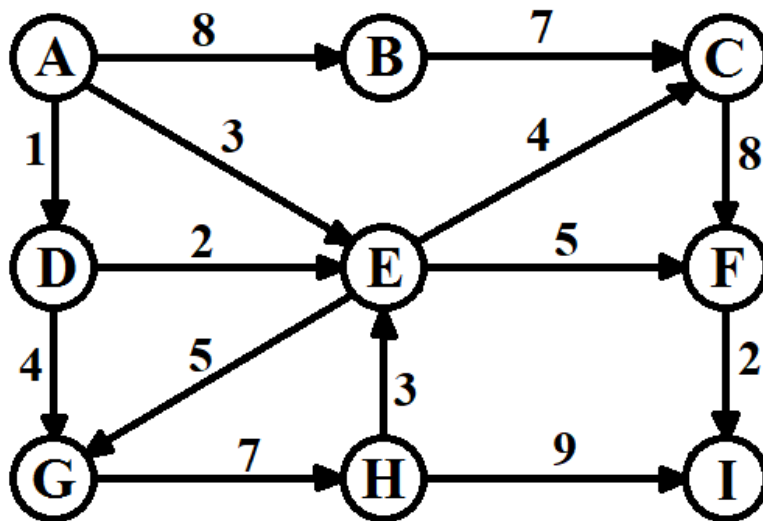
b) (200 pkt) Rozwiązać układ kongruencji:

$$\begin{cases} 4x + 3y \equiv_{37} 36 \\ 3x - 2y \equiv_{37} 15 \end{cases}$$

4. (400 punktów)

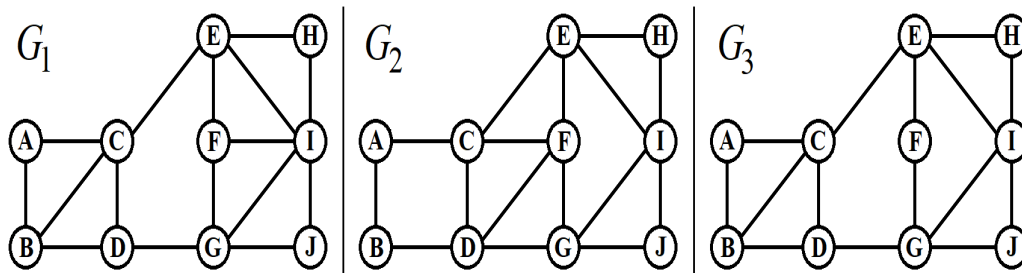
- a) Za pomocą algorytmu Edmondsa-Karpa znaleźć maksymalny przepływ pomiędzy wierzchołkami A oraz I w poniższym grafie skierowanym. Uzupełnić odpowiednią tabelę przebiegu algorytmu i narysować graf z oznaczonym maksymalnym przepływem.

Nr etapu	Ścieżka powiększająca	Przepustowość	Alternatywy
----------	-----------------------	---------------	-------------



- b) Dla każdego z grafów G_1, G_2, G_3 sprawdzić, czy występuje w nim cykl lub droga Eulera. Odpowiedź uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenie. Jeśli dla któregoś z grafów będzie istnieć droga Eulera, ale nie cykl Eulera, wykorzystać algorytm Fleury'ego do znalezienia jednej z tych dróg zapisując przebieg algorytmu w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać odpowiedź w postaci ciągu kolejnych wierzchołków na tej drodze.

Nr etapu	Wybrany wierzchołek	Alternatywy
----------	---------------------	-------------



5. (400 punktów) a) Sformułować wypowiedź zasady szufladkowej Dirichleta i opisać jej przykładowe zastosowanie.

- b) Narysować po 2 nieizomorficzne drzewa do każdego z poniższych podpunktów:

- I. Zapis prefiksowy tego drzewa to ABCDEF;
- II. Zapis infiksowy tego drzewa to ABCDEFG.