

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut. Nikt nie wychodzi w ciągu ostatnich 10 minut.
 2. Podczas egzaminu wolno korzystać jedynie z kalkulatora, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od prowadzących egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno mieć przy sobie własnych kartek i żadnych narzędzi umożliwiających kontakt ze światem zewnętrznym.
 3. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu.
 4. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.
-

Zadania:

1. (400 punktów) Orkiestra Dyskretna zatrudnia 49 muzyków grających na instrumentach strunowych, 37 grających na instrumentach dętych, 24 grających na instrumentach klawiszowych, 27 specjalistów od instrumentów perkusyjnych i 12 śpiewaków-solistów.

a) Członkowie Orkiestry postanowili wybrać swoich reprezentantów do władz Związku Zawodowego Muzyków. Chcą wybrać 10 osób, a w tej grupie powinien być co najmniej 1 muzyk każdej specjalności. Na ile sposobów mogą podzielić miejsca w reprezentacji pomiędzy specjalności (zakładamy, że nie jest istotne, kto konkretnie jest reprezentantem, tylko ile miejsc w reprezentacji ma każda specjalność)?

b) Na ile sposobów można ustawić członków Orkiestry Dyskretnej w szeregu, jeżeli istotna jest dla nas wyłącznie specjalność osoby stojącej w szeregu (tzn. zamiana miejscami 2 muzyków tej samej specjalności nie daje nowego ustawienia)?

c) W nagrodę za zwycięstwo w Cyklicznym Konkursie im. Williama Rowana Hamiltona, Orkiestra Dyskretna otrzymała nagrody:

- trzy rowery, każdy innego koloru, dla grających na instrumentach perkusyjnych, którzy zdecydowali, że rozlosują je pomiędzy siebie tak, by rowery trafiły do trzech różnych osób;
- 5 różnych aparatów fotograficznych, z których każdy będzie przydzielony losowo jednemu ze specjalistów od instrumentów klawiszowych;
- 50 nierozróżnialnych biletów na wycieczkę, rozlosowanych pomiędzy muzyków pozostałych specjalności tak, że dokładnie 30 biletów otrzymają specjaliści od instrumentów strunowych, najwyżej 2 bilety - śpiewacy, a pozostałe - grający na instrumentach dętych.

Na ile sposobów, zgodnie z tymi wytycznymi, nagrody mogły zostać rozdzielone pomiędzy członków Orkiestry Dyskretnej (wszyscy muzycy są rozróżnialni)?

d) Z 40 utworów instrumentalnych wybranych na specjalny koncert Orkiestry Dyskretnej, w 22 konieczne jest użycie wszystkich 4 typów instrumentów (a więc również każdego z 3 typów!), a w pozostałych używane są najwyżej 2 typy. W 25 utworach są używane instrumenty strunowe i klawiszowe, w tej samej liczbie strunowe i perkusyjne w 24 - klawiszowe i dęte, a także strunowe i perkusyjne, a po 23 razy występują w utworze razem instrumenty perkusyjne i dęte oraz dęte i strunowe. Wiemy też, że instrumenty strunowe są wykorzystywane w 31 utworach, perkusyjne w 28, a dęte w 27. W ilu utworach wykorzystuje się instrumenty klawiszowe?

2. (400 pkt) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:

$$s_{n+1} = 2s_n + 15s_{n-1} + 16 \cdot 5^n; s_0 = -7, s_1 = 7.$$

3. a) (100 pkt) Obliczyć $\varphi(5400)$.

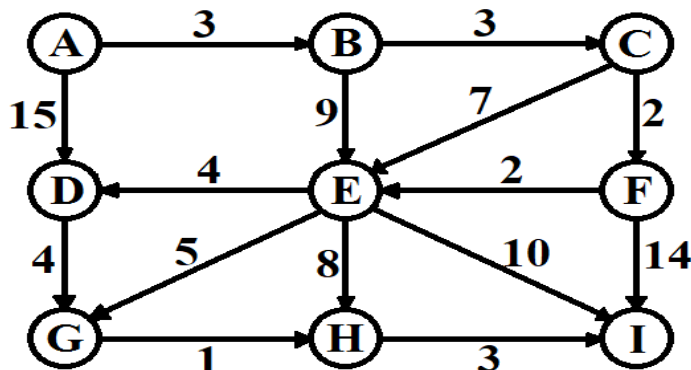
b) (100 pkt) Za pomocą twierdzenia Eulera obliczyć $23^{25207} \pmod{36}$.

c) (200 pkt) Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną, dla której reszta z dzielenia przez 7 wynosi 4, reszta z dzielenia przez 9 wynosi 1, a reszta z dzielenia przez 13 wynosi 9.

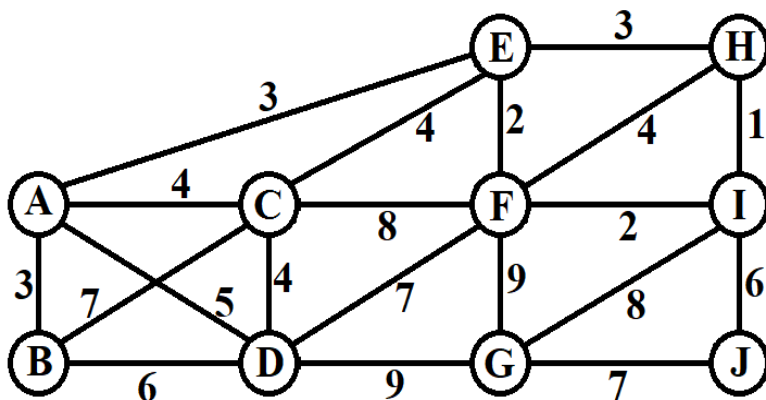
4. (400 punktów)

- a) Zastosować algorytm Dijkstry ze wskaźnikami do wyznaczenia drogi o najmniejszej wadze pomiędzy wierzchołkami A i I poniższego grafu. Przebieg algorytmu zapisać w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać tę drogę i jej wagę.

Nr etapu	Zbiór L	d(B)p(B)	d(C)p(C)	...
----------	---------	----------	----------	-----



- b) Znaleźć minimalne drzewo spinające dla poniższego grafu za pomocą algorytmu Kruskala oraz za pomocą algorytmu Prima. Przebieg każdego algorytmu zapisać w odpowiadającej mu tabeli. Jeśli algorytm trzeba rozpocząć od jakiegoś wierzchołka, rozpocząć należy od A . Jeśli algorytm wymaga uszeregowania krawędzi, wypisać to uszeregowanie. Podpisać każdy z algorytmów oraz podać wagę każdego z uzyskanych minimalnych drzew spinających.



Nr etapu	Wybrana krawędź	Krawędzie odrzucone przed wyborem/Alternatywy
----------	-----------------	---

5. (400 punktów) a) Jakie warunki musi spełniać para (n, e) , by mogła tworzyć klucz publiczny w algorytmie szyfrowania RSA? Które z następujących par spełniają te warunki (odpowiedź uzasadnić): $(44, 3)$, $(46, 11)$, $(51, 5)$?

b) Narysować grafy spójne, proste, o co najmniej 4 wierzchołkach i 6 krawędziach spełniające warunki (lub uzasadnić, dlaczego taki graf nie istnieje):

- I. Zarówno liczba chromatyczna jak i indeks chromatyczny tego grafu wynosi 3;
- II. Graf jest hamiltonowski, a jego indeks chromatyczny wynosi 4;
- III. Graf nie jest hamiltonowski, a jego indeks chromatyczny wynosi 4;
- IV. Graf jest dwudzielny, a jego liczba chromatyczna wynosi 3.