

4 II 2023

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut. Nikt nie wychodzi w ciągu ostatnich 10 minut.
 2. Podczas egzaminu wolno korzystać jedynie z kalkulatora, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od prowadzących egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno mieć przy sobie własnych kartek i żadnych narzędzi umożliwiających kontakt ze światem zewnętrznym.
 3. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu.
 4. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.
-

Zadania:

1. (400 punktów) Chór Dyskretny zatrudnia 35 basów, 28 tenorów, 45 sopranów i 24 alty.
 - a) Chór dostał zamówienie na występ w studiu Radia Euler. Zaproszony zespół ma się składać z 40 osób, z czego 10 basów, 8 tenorów i co najmniej 13, a co najwyżej 15 sopranów. Na ile sposobów można wybrać zespół osób występujących w ramach tego zamówienia?
 - b) Członków Chóru Dyskretnego zaproszono, by poprowadzili szkolenia dla uczniów zainteresowanych śpiewem. Na ile sposobów można rozdzielić te zaproszenia pomiędzy basy, tenory, sopranów i alty, jeśli potrzebnych jest dokładnie 17 szkoleniowców, w tym co najmniej 2 basy, 2 tenory, 2 sopranów i 2 alty, oraz jeśli nie interesuje nas, kto konkretnie otrzyma zaproszenia, tylko jak one będą rozdzielone pomiędzy rodzaje głosów.
 - c) Chór Dyskretny występuje codziennie. W ciągu 30-dniowego miesiąca 4 razy wykonuje koncerty piosenek ludowych, 5 razy koncerty pieśni operowych, 8 razy w miesiącu są to aranżacje współczesnej muzyki rozrywkowej, a w pozostałe dni - koncerty „firmowe” złożone z utworów skomponowanych przez dyrektora Chóru. Na ile sposobów, przy tych założeniach, można przyporządkować różne rodzaje występów Chóru Dyskretnego do różnych dni miesiąca?
 - d) Spośród 132 śpiewaków z Chóru Dyskretnego, 93 wykonuje piosenki ludowe, 89 - pieśni operowe, 80 - aranżacje współczesnej muzyki rozrywkowej, a 69 pieśni „firmowe”; 63 wykonuje zarówno piosenki ludowe, jak i pieśni operowe, 58 - operowe i współczesne, 55 - ludowe i współczesne, 53 - ludowe i „firmowe”, 49 - operowe i „firmowe”, 48 - rozrywkowe i „firmowe”; 43 występuje podczas koncertów ludowych, operowych i rozrywkowych, 38 - ludowych, rozrywkowych i „firmowych”, 40 - ludowych, operowych i „firmowych”, a 39 - operowych, rozrywkowych i „firmowych”. Ile osób wykonuje wszystkie 4 typy pieśni, jeśli każdy śpiewak wykonuje co najmniej jeden?

2. (400 pkt) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:

$$s_{n+1} = 3s_n + 28s_{n-1} + 45 \cdot 2^n; s_0 = 4, s_1 = -1.$$

3. a) (200 pkt) Czy istnieje para liczb całkowitych (x, y) spełniająca równanie I? Czy istnieje para liczb całkowitych (u, w) spełniająca równanie II? Jeśli przynajmniej jedna taka para istnieje, wyznaczyć ją za pomocą odpowiedniego algorytmu, jeśli nie, uzasadnić dlaczego.

I. $8316x + 4725y = 372$,

II. $6688u + 2156w = 132$.

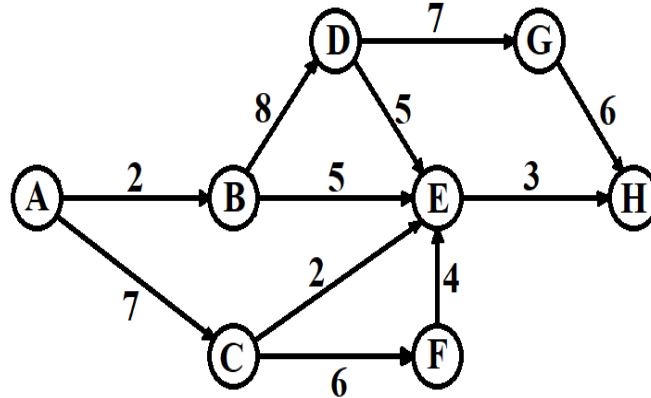
- b) (200 pkt) Rozwiązać układ kongruencji:

$$\begin{cases} 3x - 2y \equiv_{19} \varphi(175) \\ 5x + 7y \equiv_{19} 2 \end{cases}$$

4. (400 punktów)

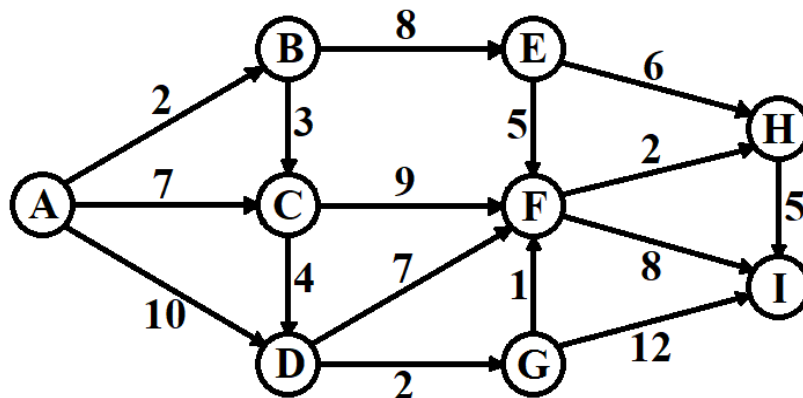
- a) Za pomocą algorytmu Edmondsa-Karpa wyznaczyć maksymalny przepływ pomiędzy wierzchołkami A oraz H w poniższym grafie skierowanym. Uzupełnić odpowiednią tabelę przebiegu algorytmu.

Nr etapu	Ścieżka powiększająca	Przepustowość	Alternatywy
----------	-----------------------	---------------	-------------



- b) Zastosować algorytm Dijkstry ze wskaźnikami do wyznaczenia drogi o najmniejszej wadze pomiędzy wierzchołkami A i I poniższego grafu. Przebieg algorytmu zapisać w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać tę drogę i jej wagę.

Nr etapu	Zbiór L	d(B)p(B)	d(C)p(C)	...
----------	---------	----------	----------	-----



5. (400 punktów) a) Jakie warunki musi spełniać para (n, e) , by mogła tworzyć klucz publiczny w algorytmie szyfrowania RSA? Które z następujących par spełniają te warunki (odpowiedź uzasadnić): $(63, 13)$, $(57, 25)$, $(35, 3)$.

b) Narysować grafy spójne, proste, o co najmniej 4 wierzchołkach i 6 krawędziach spełniające warunki (lub uzasadnić, dlaczego taki graf nie istnieje):

- I. Zarówno liczba chromatyczna jak i indeks chromatyczny tego grafu wynosi 3;
- II. Graf jest eulerowski a jego liczba chromatyczna wynosi 3;
- III. Indeks chromatyczny grafu jest większy od maksymalnego stopnia tego grafu o 2;
- IV. Indeks chromatyczny grafu jest większy od maksymalnego stopnia tego grafu o 1.