Model przepływów międzygałęziowych Leontiewa.

Model przepływów międzygałęziowych Leontiewa analizuje następujący problem: jaki powinien być poziom produkcji poszczególnych gałęzi przemysłu w danej gospodarce, aby całkowity popyt na wytwarzane przez nie produkty był zaspokojony? Oczywiście, można z niego odczytać wiele innych informacji, w zależności od tego, co mamy dane, a czego szukamy.
Założenia modelu: Gospodarka jest podzielona na n gałęzi przemysłu. Każda gałąź wytwarza jeden, jednorodny produkt, każda gałąź zużywa do produkcji kombinację czynników w ustalonej proporcji, k-krotna zmiana wielkości wszystkich nakładów powoduje k-krotną zmianę wielkości produktu (stała zależność od skali).

Oznaczenia: $i, j \in \{1, \dots, n\}$ - numery gałęzi przemysłu. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ to **wektor produktów całkowitych (globalnych)**, gdzie x_i to produkt całkowity gałęzi i, czyli wielkość produkcji wytworzona przez gałąź i w ustalonym okresie (wyrażona w tych samych jednostkach pieniężnych).
y_{ij} jest to ta wielkość produkcji gałęzi i, która jest zużywana na potrzeby produkcyjne gałęzi j. Macierz $Y = [y_{ij}]$ nazywamy **tabelą przepływów międzygałęziowych**. Każdy wiersz tej macierzy przechowuje wielkości zużycia produktu danej gałęzi na rynku wewnętrznym - do produkcji pozostałych dóbr. Z kolei każda kolumna macierzy przechowuje nakłady różnych gałęzi przemysłu konieczne do wytworzenia produktu całkowitego danej gałęzi.
$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \cdots \\ d_n \end{bmatrix}$ to **wektor produktów końcowych** lub **popytów końcowych**, gdzie d_i to produkt końcowy gałęzi i, czyli wielkość produkcji, jaka pozostaje (np. na zaspokojenie popytu zewnętrznego, eksport) po zużyciu na cele produkcyjne we wszystkich gałęziach przemysłu.
Oczywiście, całkowity produkt danej gałęzi przemysłu to suma zużycia produktu na rynku wewnętrznym i produktu końcowego danej gałęzi, co można zapisać równaniem:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} + d_i.$$

Ze względu na to, że wielkości produkcji się zmieniają, bardziej interesująca w ogólnych badaniach jest **macierz współczynników kosztów/nakładów** $C = [c_{ij}]$, która opisuje proporcje nakładów pochodzących z różnych gałęzi gospodarki potrzebnych do wytworzenia jednostki danego produktu. Obliczyć ją można prosto: dzieląc każdą kolumnę nakładów, przez wielkość produkcji gałęzi odpowiadającej tej kolumnie, czyli:

$$c_{ij} = \frac{y_{ij}}{x_j}.$$

Można powiedzieć, że c_{ij} oznacza zapotrzebowanie na nakłady produktu i do wytworzenia jednostki produktu j. Interpretujemy to następująco: do wytworzenia 1 jednostki dobra j potrzebne jest c_{ij} jednostek dobra i. Macierz współczynników kosztów nazywa się też czasem **macierzą konsumpcji**.
Pomocniczą macierz

$$L = I - C$$

nazywamy **macierzą Leontiewa**.

Wyniki:
Cx to część produkcji przeznaczana na wewnętrzne zapotrzebowanie gospodarki. Dlatego to co zostaje jako produkt końcowy to $d = x - Cx = (I - C)x$. Ostatecznie

$$L \cdot x = d.$$

Ze względu na liniowość, ta sama relacja zachodzi pomiędzy zmianami poziomu produkcji całkowitej Δx a zmianami produktu końcowego Δd.
$L \cdot \Delta x = \Delta d$.
Okazuje się, że ze względu na definicje macierzy w zadaniu, zawsze zachodzi $\det L \neq 0$, więc macierz Leontiewa jest zawsze odwracalna. Dlatego, jeśli mamy jakieś zadanie, w którym trzeba obliczyć np. produkcję potrzebną do wyeksportowania danej wielkości jakiegoś dobra, możemy skorzystać z równania:

$$x = L^{-1}d.$$

Analogicznie, jeśli w zadaniu jest tylko pytanie o to, jak zmienić produkcję w sytuacji, gdy zmieniło się zapotrzebowanie zewnętrzne na produkty danej gospodarki, to odpowiedź można uzyskać równaniem:

$$\Delta x = L^{-1}\Delta d.$$