Algebra - zestaw 3

Podstawy rachunku macierzy. Wyznaczniki i macierze odwrotne.

Zadania na ćwiczenia:

I.Dane są macierze: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Wykonać poniższe działania lub uzasadnić, dlaczego ich wykonanie jest niemożliwe:
a) $BC + \frac{1}{2}A$, b) $2CB - 3D^T$, c) D^2B^T, d) $A^3 - C$.
II. Wskaż macierze kwadratowe A, B, takie, że $AB \neq BA$.
III. Niech $f(X) = X^3 - 2X^2 + 3X - 4I + X^T$. Wyznaczyć $f(A)$, gdy
$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.
IV. Obliczyć wyznacznik i ślad macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & 9 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{bmatrix}$.

V. (do wspólnej analizy): Co się dzieje z wyznacznikiem macierzy A, gdy:
a) Macierz A ma wiersz lub kolumnę złożoną z samych zer.
b) Macierz A ma dwa wiersze (lub dwie kolumny) takie same.
c) Wszystkie elementy jednego wiersza (lub kolumny) macierzy A przemnożymy przez liczbę α.
d) Wszystkie elementy macierzy A przemnożymy przez liczbę α.
e) Pierwszą kolumnę przestawimy na ostatnie miejsce, a pozostałe kolumny przesuniemy o jedno w lewo?
f) Dołożymy do macierzy A jeden wiersz i kolumnę złożone z samych zer, poza miejscem ich przecięcia, gdzie się znajduje liczba α.
VI. Wyznaczyć macierz odwrotną do:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

VII. Dla jakiego a istnieje macierz odwrotna do: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$? Wyznaczyć tę macierz odwrotną.
VIII. (do wspólnej analizy) Ktore z własności przenoszą się z macierzy A na A^{-1} (tj. jeśli A ma daną własność, to A^{-1} też)?
a) A-trójkątna, b) A-odwracalna, c) A-symetryczna, d) A-diagonalna.

Zadania domowe:

Zadanie 1. Dane są macierze:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Wykonać poniższe działania lub uzasadnić, dlaczego jest to niemożliwe:
a) $A + 2B$; b) $2A + D$; c) $A^T - C$; d) $A \cdot B$; e) $B \cdot A$ f) $D \cdot C \cdot B$; g) $C^T \cdot A$;
h) A^2; i) B^2, j) $A \cdot C$, k) $(D^T - C) \cdot B^T$, l) $C \cdot B^3 \cdot D$, ł) $(B - D)A$,
m) $C \cdot D \cdot A^T$; n) $(2D + A) \cdot C^T$; o) $B \cdot (C^T + \frac{D}{2})$.

Zadanie 2. Znaleźć $f(A)$, gdy

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $f(x) = X^3 - 2X^2 + 3X - 4I$;

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x) = 2(X^T)^2 - 5(X+I)$.

Zadanie 3. Obliczyć wyznaczniki i ślady macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ \sin y & \cos y & 1 \\ \sin z & \cos z & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4. Załóżmy, że podane poniżej macierze mają odpowiednio wymiary: A - 2×2, B - 2×3, C - 3×2, D - 3×3, E -2×4, F - 4×2, G - 4×3, H - 3×4, J - 4×4. Przy tych założeniach podać (i uzasadnić) wymiar macierzy X (lub uzasadnić, że macierz X nie istnieje), jeśli:

a) $X = ((BB^T)E)^T G$, b) $X = ((FE)^T G)^{-1} D)^T$, c) $X = (F((B(CE))^T A)^T J^{-1})^T$,
d) $X = (((D(HG)^{-1}C)^T H)^T B)^T$, e) $X = ((H(EJ)^T B)^{-1} C)^T G^T$.

Zakładamy, że wszystkie macierze kwadratowe, które wychodzą w obliczeniach, są odwracalne.

Zadanie 5. Znaleźć macierze odwrotne do macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -5 & -9 & 5 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Dobrej zabawy!
Grzesiek Kosiorowski