Liczby zespolone

Zadania na ćwiczenia:

I. Obliczyć, przedstawiając wynik w postaci algebraicznej:
a) $\frac{1+3i}{1+2i}$; b) $\frac{(\sqrt{3}-3i)^8}{(\sqrt{3}+i)^{13}}$

II. Obliczyć pierwiastki, przedstawiając wynik w postaci algebraicznej $(a+bi)$, o ile to możliwe - w innym wypadku w postaci trygonometrycznej:
a) $\sqrt{4i-3}$; b) $\sqrt[3]{-2+2i}$

III. Rozwiązać poniższe równania, przedstawiając wynik w postaci algebraicznej
a) $z^2+6z+13=0$; b) $iz^2+(i-3)z+1-8i=0$.

IV. Na płaszczyźnie zestpolonej zaznaczyć zbiór punktów spełniający warunek:
a) $\operatorname{Arg} z \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \wedge 1 \leq |\bar{z}+i| \leq 3$;
b) $|z+3-3i| \leq 3 \wedge 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{3}{4}\pi \wedge \operatorname{Im} z > 2$.

Zadania domowe:

Zadanie 1. Przedstawić podane poniżej liczby w postaci trygonometrycznej:
a) 1, b) i, c) $(1+i)$, d) $(\sqrt{3}+i)$, e) $(1-\sqrt{3}i)$.

Zadanie 2. Obliczyć, przedstawiając wynik w postaci algebraicznej $(a+bi)$:
a) $\frac{i^2+i^3+i^4+i^5}{i^6+i^7+i^8}$, b) $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{-1+i\operatorname{tg}\alpha}$, c) $\frac{2+i}{3-i}$, d) $\frac{3-4i}{1+i}$,
e) $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^2$, f) $(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})^8$, g) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1-i})^{48}$, h) $\frac{(-\cos\alpha+i\sin\alpha)^5}{-1+i\sqrt{3}}$,
i) $\frac{(1-i)^{12}}{(\sqrt{3}+i)^{10}}$, j) $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^{12}}{(2+2i)^5}$, k) $\frac{(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i)^{29}}{(\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}i)^{14}}$.

Zadanie 3. Obliczyć pierwiastki, przedstawiając wynik w postaci algebraicznej $(a+bi)$, o ile to możliwe - w innym wypadku w postaci trygonometrycznej:
a) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$, b) $\sqrt{12i-7}$, c) $\sqrt{1+3i}$, d) $\sqrt[3]{8}$, e) $\sqrt[5]{1}$.

Zadanie 4. Rozwiązać (w liczbach zespolonych) równania, przedstawiając wynik w postaci algebraicznej $(a+bi)$:
a) $z^3=1$, b)$z^3=-1$, c) $z^3=-i$, d) $(5-5i)z^2-(3-2i)z+1=0$,
e) $z^2+z+1=0$, f) $z^4+z^2+1=0$, g) $z^2+2iz=-3$, h) $z^2+2z+5=0$,
i) $z^2-(1+3i)z-4=0$, j) $z^2-(4-2i)z+6=0$,
k) $z^2-(2+3i)z=5-i$, l) $z^2+8+9i=(7+3i)z$,
m) $z^3-12z^2+48z-64-i=0$, n) $8z^3-12z^2+6z-1-i=0$.

Zadanie 5. Na płaszczyźnie zespolonej zaznaczyć zbiór punktów spełniający warunek:
a) $|z|<2$, b) $|z-1-i|=2$, c) $0<\operatorname{Im}(iz)+\operatorname{Re}(iz)<1$,
d) $z^4=1$, e)$|z|<4$ i $0<\operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{2}$, f) $\operatorname{Arg} z > \frac{5}{4}\pi \wedge \operatorname{Im}(z) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
g) $\frac{3\pi}{2} \leq \operatorname{Arg} z < \frac{7\pi}{4} \wedge |z+2| \geq 2 \wedge \operatorname{Im} z > -3$, h) $|z+2i|<2 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{7}{4}\pi \wedge \operatorname{Re} z \geq -1$.

Zadanie 6. Udowodnić równości i nierówności zachodzące dla liczb zespolonych (lub podać kontrprzykłady, jeśli nie zachodzą):
a) $z\bar{z}=z^2$; b) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$;
c)$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$; d) $|\bar{z}|=|z|$; e)$|z_1-z_2| \geq ||z_1|-|z_2||$; f) $|z_1 \cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

Dobrej zabawy!
GK