III. Wstęp: Elementarne równania i nierówności

Fryderyk Falniowski, Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Wstępne uwagi

W tej części wstępu zajmiemy się elementarnymi równaniami i nierównościami. Większość wiadomości i umiejętności z tej części wszyscy powinni znać ze szkoły średniej, jednak praktyka pokazuje, że są to umiejętności często zapominane. Dlatego tutaj pokrótce przypomnimy sobie wszystko, co jest potrzebne.

Wstępne uwagi

W tej części wstępu zajmiemy się elementarnymi równaniami i nierównościami. Większość wiadomości i umiejętności z tej części wszyscy powinni znać ze szkoły średniej, jednak praktyka pokazuje, że są to umiejętności często zapominane. Dlatego tutaj pokrótce przypomnimy sobie wszystko, co jest potrzebne.
Uwaga: umiejętność rozwiązywania elementarnych równań i nierówności będzie kluczowa do rozwiązywania zadań w przyszłości, dlatego ten podrozdział wstępu jest niezwykle ważny. Brak umiejętności rozwiązywania równań i nierówności może doprowadzić do utraty większości lub wszystkich punktów za zadanie dotyczące np. badania przebiegu zmienności funkcji lub interpretacji geometrycznej całki, nawet jeśli ktoś radzi sobie doskonale z pochodnymi i całkami. Dlatego mocno zachęcamy do porządnego przyswojenia sobie tych wiadomości i umiejętności.

Dziedzina nierówności

Rozwiązywanie KAŻDEJ równości lub nierówności rozpoczynamy zawsze od sprawdzenia jej dziedziny - dokładnie w ten sam sposób, w jaki ustalaliśmy dziedzinę funkcji. Jeśli jakaś liczba nie należy do dziedziny równości bądź nierówności, to nie może być jej rozwiązaniem.

Równania wielomianowe

Równanie wielomianowe to równanie postaci $W(x) = V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami.

Równania wielomianowe

Równanie wielomianowe to równanie postaci $W(x) = V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami. Dziedziną takiego równania jest zawsze $\mathbb{R}$.

Równania wielomianowe

Równanie wielomianowe to równanie postaci $W(x) = V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami. Dziedziną takiego równania jest zawsze $\mathbb{R}$.
Pierwsze, co robimy w takich sytuacjach, to przerzucamy wszystko na jedną stronę, by otrzymać równanie: $P(x) = 0$, gdzie P jest wielomianem.

Równania wielomianowe

Równanie wielomianowe to równanie postaci $W(x) = V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami. Dziedziną takiego równania jest zawsze $\mathbb{R}$.
Pierwsze, co robimy w takich sytuacjach, to przerzucamy wszystko na jedną stronę, by otrzymać równanie: $P(x) = 0$, gdzie P jest wielomianem. Gdy P jest wielomianem stopnia 1 lub 2, sposób postępowania jest znany ze szkoły podstawowej i średniej - nie będziemy tego powtarzać.

Równania wielomianowe

Równanie wielomianowe to równanie postaci $W(x) = V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami. Dziedziną takiego równania jest zawsze $\mathbb{R}$.
Pierwsze, co robimy w takich sytuacjach, to przerzucamy wszystko na jedną stronę, by otrzymać równanie: $P(x) = 0$, gdzie P jest wielomianem. Gdy P jest wielomianem stopnia 1 lub 2, sposób postępowania jest znany ze szkoły podstawowej i średniej - nie będziemy tego powtarzać. Jeśli P jest wielomianem stopnia wyższego niż 2, trzeba zgadnąć jego miejsce zerowe a (korzystając z zasad typu: jeśli miejsce zerowe jest liczbą całkowitą, to musi być dzielnikiem wyrazu wolnego), a następnie (z Twierdzenia Bezouta) przedstawić $P(x) = Q(x) \cdot (x - a)$ i zająć się tak samo wielomianem $Q(x)$, aż dostaniemy rozkład wielomianu $P(x)$ na iloczyn wielomianów stopnia 1 i 2.

Równanie wielomianowe - przykład

Zadanie

Rozwiązać równanie:

$$x^6 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12 = 10x^4 + 7x^3 + 4x.$$

Równanie wielomianowe - przykład

Zadanie

Rozwiązać równanie:

$$x^6 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12 = 10x^4 + 7x^3 + 4x.$$

Rozpoczynamy od doprowadzenia równania do postaci, w której po prawej stronie jest 0:

$$P(x) = x^6 - 8x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 12 = 0.$$

Równanie wielomianowe - przykład

Zadanie

Rozwiązać równanie:

$$x^6 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12 = 10x^4 + 7x^3 + 4x.$$

Rozpoczynamy od doprowadzenia równania do postaci, w której po prawej stronie jest 0:

$$P(x) = x^6 - 8x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 12 = 0.$$

Następnie wielomian po lewej stronie rozkładamy na czynniki pierwsze, korzystając z obserwacji, że $P(1) = 0$, $P(-2) = 0$ i $P(3) = 0$:

$$(x-1)(x+2)^2(x-3)(x^2+1) = 0.$$

Równanie wielomianowe - przykład

Zadanie

Rozwiązać równanie:

$$(x-1)(x+2)^2(x-3)(x^2+1)=0.$$

Równanie wielomianowe - przykład

Zadanie

Rozwiązać równanie:

$$(x-1)(x+2)^2(x-3)(x^2+1)=0.$$

Wystarczy teraz skorzystać z faktu, że iloczyn jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy choć jeden składnik jest równy zero.

Równanie wielomianowe - przykład

Zadanie

Rozwiązać równanie:

$$(x-1)(x+2)^2(x-3)(x^2+1)=0.$$

Wystarczy teraz skorzystać z faktu, że iloczyn jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy choć jeden składnik jest równy zero. Dlatego rozwiązaniami tego równania są $x=1$, $x=-2$ (dwukrotny pierwiastek) i $x=3$.

Równanie wielomianowe - przykład

Zadanie

Rozwiązać równanie:

$$(x-1)(x+2)^2(x-3)(x^2+1)=0.$$

Wystarczy teraz skorzystać z faktu, że iloczyn jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy choć jeden składnik jest równy zero. Dlatego rozwiązaniami tego równania są $x=1$, $x=-2$ (dwukrotny pierwiastek) i $x=3$. Wielomian x^2+1 nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc nie daje nam żadnych dodatkowych rozwiązań.

Nierówności wielomianowe

Nierówność wielomianowa to nierówność postaci $W(x) > (\geqslant) V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami.

Nierówności wielomianowe

Nierówność wielomianowa to nierówność postaci $W(x) > (\geqslant) V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami. Dziedziną takiej nierówności jest zawsze $\mathbb{R}$.

Nierówności wielomianowe

Nierówność wielomianowa to nierówność postaci $W(x) > (\geqslant) V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami. Dziedziną takiej nierówności jest zawsze $\mathbb{R}$.
By rozwiązać taką nierówność, rozwiązujemy najpierw równanie $W(x) = V(x)$.

Nierówności wielomianowe

Nierówność wielomianowa to nierówność postaci $W(x) > (\geqslant) V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami. Dziedziną takiej nierówności jest zawsze $\mathbb{R}$.

By rozwiązać taką nierówność, rozwiązujemy najpierw równanie $W(x) = V(x)$. Po znalezieniu pierwiastków wielomianu P i ich krotności (jak w przypadku równań) sprawdzamy znak współczynnika przy najwyższej potędze i szkicujemy wykres tego wielomianu.

Nierówności wielomianowe

Nierówność wielomianowa to nierówność postaci $W(x) > (\geqslant) V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami. Dziedziną takiej nierówności jest zawsze $\mathbb{R}$.

By rozwiązać taką nierówność, rozwiązujemy najpierw równanie $W(x) = V(x)$. Po znalezieniu pierwiastków wielomianu P i ich krotności (jak w przypadku równań) sprawdzamy znak współczynnika przy najwyższej potędze i szkicujemy wykres tego wielomianu. Następnie z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności.

Nierówność wielomianowa - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x^6 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12 > 10x^4 + 7x^3 + 4x.$$

Nierówność wielomianowa - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x^6 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12 > 10x^4 + 7x^3 + 4x.$$

Tak jak poprzednio, rozpoczynamy od doprowadzenia formuły do postaci, w której po prawej stronie jest 0 i rozłożenia wielomianu z lewej strony na czynniki pierwsze:

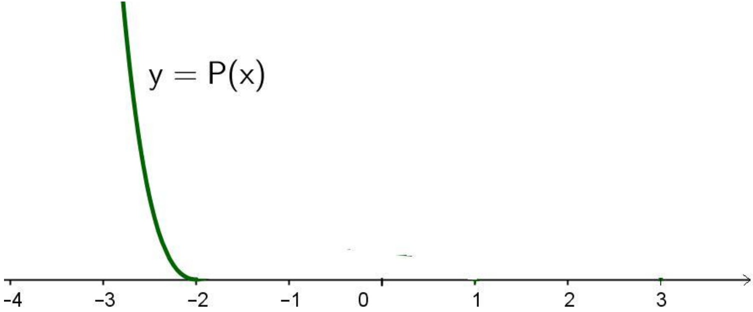
$$P(x) = x^6-8x^4-4x^3+3x^2-4x+12 = (x-1)(x+2)^2(x-3)(x^2+1) > 0.$$

Nierówność wielomianowa - przykład

Szkicujemy teraz wykres wielomianu P, pamiętając, że jego miejsca zerowe to kolejno: $x = -2$ (dwukrotny pierwiastek), $x = 1$, i $x = 3$.

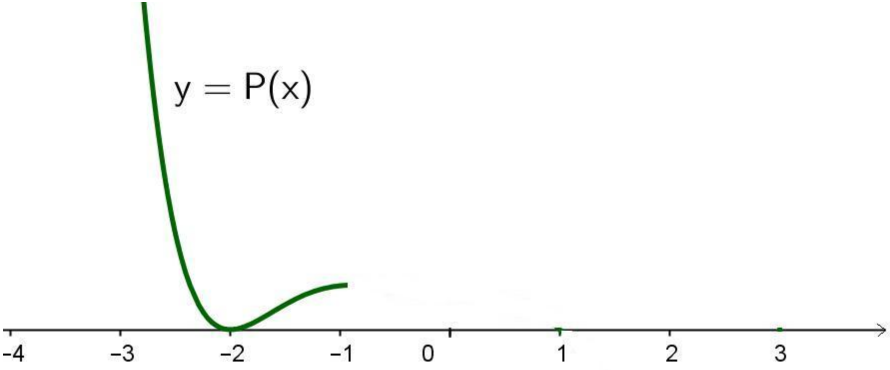
Nierówność wielomianowa - przykład

Szkicujemy teraz wykres wielomianu P, pamiętając, że jego miejsca zerowe to kolejno: $x = -2$ (dwukrotny pierwiastek), $x = 1$, i $x = 3$. Zaczynamy od lewej strony (można też od prawej). Skoro wielomian jest stopnia parzystego i najwyższy współczynnik jest dodatni, to zaczynamy rysować „od góry" i nie zmieniamy znaku aż do pierwszego miejsca zerowego...



Nierówność wielomianowa - przykład

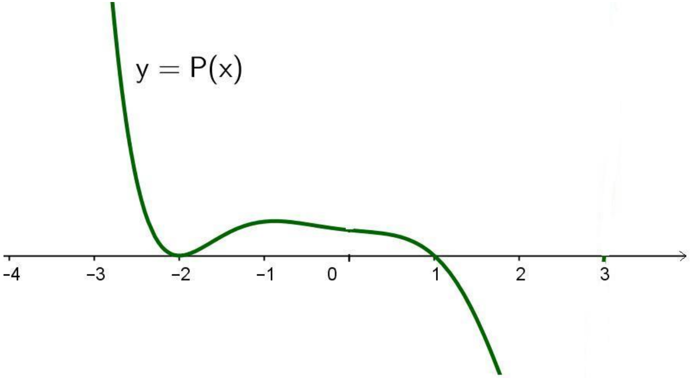
Skoro -2 jest podwójnym miejscem zerowym (ogólnie - krotności parzystej), wykres w tym miejscu „odbija się" od osi:



.

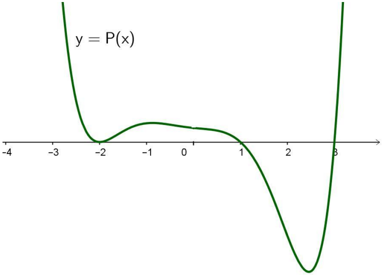
Nierówność wielomianowa - przykład

Teraz 1 jest pojedynczym miejscem zerowym (ogólnie - krotności nieparzystej), wykres w tym miejscu „przechodzi na drugą stronę” osi:



Nierówność wielomianowa - przykład

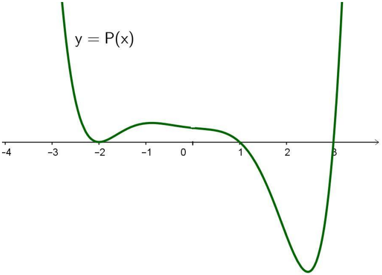
Stosując tę samą zasadę do ostatniego miejsca zerowego otrzymujemy szkic,...



.

Nierówność wielomianowa - przykład

Stosując tę samą zasadę do ostatniego miejsca zerowego otrzymujemy szkic,...



.

...z którego łatwo odczytujemy rozwiązanie: $P(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (3, +\infty)$.

Równania i nierówności - ogólna uwaga

Jak łatwo zauważyć, rozwiązując nierówność wielomianową niejako przy okazji, po drodze, rozwiązaliśmy odpowiadające jej równanie wielomianowe.

Równania i nierówności - ogólna uwaga

Jak łatwo zauważyć, rozwiązując nierówność wielomianową niejako przy okazji, po drodze, rozwiązaliśmy odpowiadające jej równanie wielomianowe. Tak się dzieje w przypadku wszystkich elementarnych równań i nierówności, które będą potrzebne na tym kursie.

Równania i nierówności - ogólna uwaga

Jak łatwo zauważyć, rozwiązując nierówność wielomianową niejako przy okazji, po drodze, rozwiązaliśmy odpowiadające jej równanie wielomianowe. Tak się dzieje w przypadku wszystkich elementarnych równań i nierówności, które będą potrzebne na tym kursie. Dlatego odtąd będziemy analizować tylko techniki rozwiązywania nierówności - sposób ich rozwiązywania wskazuje jednoznacznie, jak można rozwiązać równanie.

Nierówności wymierne

Nierówność wymierna to nierówność postaci $W(x) > (\geqslant) V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są funkcjami wymiernymi.

Nierówności wymierne

Nierówność wymierna to nierówność postaci $W(x) > (\geqslant) V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są funkcjami wymiernymi. Dziedziną takiej nierówności jest iloczyn (przecięcie) dziedzin funkcji V i W.

Nierówności wymierne

Nierówność wymierna to nierówność postaci $W(x) > (\geqslant) V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są funkcjami wymiernymi. Dziedziną takiej nierówności jest iloczyn (przecięcie) dziedzin funkcji V i W.
Pierwsze, co robimy w takich sytuacjach, to przerzucamy wszystko na jedną stronę, by otrzymać nierówność: $Q(x) > (\geqslant)0$, gdzie Q jest funkcją wymierną. W szczególności, zapisujemy Q w postaci funkcji wymiernej, sprowadzając wszystkio po lewej stronie nierówności do wspólnego mianownika.

Nierówności wymierne

Nierówność wymierna to nierówność postaci $W(x) > (\geqslant) V(x)$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są funkcjami wymiernymi. Dziedziną takiej nierówności jest iloczyn (przecięcie) dziedzin funkcji V i W.
Pierwsze, co robimy w takich sytuacjach, to przerzucamy wszystko na jedną stronę, by otrzymać nierówność: $Q(x) > (\geqslant) 0$, gdzie Q jest funkcją wymierną. W szczególności, zapisujemy Q w postaci funkcji wymiernej, sprowadzając wszystkio po lewej stronie nierówności do wspólnego mianownika. Następnie korzystamy z faktu, że w ramach dziedziny takiej nierówności, iloraz ma taki sam znak jak iloczyn, więc iloraz po lewej stronie można zamienić na iloczyn (bo porównujemy go z zerem), co sprowadza nierówność wymierną do nierówności wielomianowej, którą już umiemy rozwiązać.

Nierówność wymierna - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

Nierówność wymierna - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

Zaczynamy od ustalenia dziedziny nierówności, którą jest $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Nierówność wymierna - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

Zaczynamy od ustalenia dziedziny nierówności, którą jest $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Następnie przekształcamy zadaną nierówność do postaci:

$$\frac{4x+1}{x-1} - \frac{3x-2}{x+2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(4x+1)(x+2)-(3x-2)(x-1)}{(x-1)(x+2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

Nierówność wymierna - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

Zaczynamy od ustalenia dziedziny nierówności, którą jest $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Następnie przekształcamy zadaną nierówność do postaci:

$$\frac{4x+1}{x-1} - \frac{3x-2}{x+2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(4x+1)(x+2)-(3x-2)(x-1)}{(x-1)(x+2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+14x}{(x-1)(x+2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+14)}{(x-1)(x+2)} \geqslant 0.$$

Nierówność wymierna - przykład

Korzystając z faktu, że w ramach dziedziny znak ilorazu jest taki sam jak znak iloczynu (przy założeniu, że $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$) możemy dalej napisać:

$$\frac{x(x+14)}{(x-1)(x+2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

Nierówność wymierna - przykład

Korzystając z faktu, że w ramach dziedziny znak ilorazu jest taki sam jak znak iloczynu (przy założeniu, że $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$) możemy dalej napisać:

$$\frac{x(x+14)}{(x-1)(x+2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x+14)(x-1)(x+2) \geqslant 0.$$

Teraz wystarczy rozwiązać tę nierówność wielomianową, pamiętając o dziedzinie, by otrzymać wynik:

Nierówność wymierna - przykład

Korzystając z faktu, że w ramach dziedziny znak ilorazu jest taki sam jak znak iloczynu (przy założeniu, że $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$) możemy dalej napisać:

$$\frac{x(x+14)}{(x-1)(x+2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x+14)(x-1)(x+2) \geqslant 0.$$

Teraz wystarczy rozwiązać tę nierówność wielomianową, pamiętając o dziedzinie, by otrzymać wynik:

$$x \in (-\infty, -14] \cup (-2, 0] \cup (1, +\infty).$$

Nierówność wymierna - błędne rozwiązanie

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

Nierówność wymierna - błędne rozwiązanie

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na często popełniany błąd, którego Państwo powinni unikać.

Nierówność wymierna - błędne rozwiązanie

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na często popełniany błąd, którego Państwo powinni unikać.
Zdarza się, że ktoś chce taką nierówność rozwiązać „na skróty”, mnożąc nierówność stronami „na krzyż” przez mianowniki.

Nierówność wymierna - błędne rozwiązanie

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na często popełniany błąd, którego Państwo powinni unikać.

Zdarza się, że ktoś chce taką nierówność rozwiązać „na skróty”, mnożąc nierówność stronami „na krzyż” przez mianowniki. W tym wypadku otrzymalibyśmy:

$$(4x+1)(x+2) \geqslant (3x-2)(x-1) \Leftrightarrow x^2+14x \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -14] \cup [0, +\infty),$$

co jak widać, jest różne od poprawnej odpowiedzi.

Nierówność wymierna - błędne rozwiązanie

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

Nierówność wymierna - błędne rozwiązanie

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

Dlaczego rozwiązywanie nierówności wymiernych przez „mnożenie na krzyż" jest niepoprawne i prowadzi do błędnej odpowiedzi?

Nierówność wymierna - błędne rozwiązanie

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

Dlaczego rozwiązywanie nierówności wymiernych przez „mnożenie na krzyż” jest niepoprawne i prowadzi do błędnej odpowiedzi? Bo nie znamy z góry znaków wyrażeń, przez które mnożymy obie strony nierówności i nie wiemy, czy przypadkiem nie trzeba zmienić kierunku tej nierówności (przy mnożeniu przez liczbę ujemną).

Nierówność wymierna - błędne rozwiązanie

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4x+1}{x-1} \geqslant \frac{3x-2}{x+2}.$$

Dlaczego rozwiązywanie nierówności wymiernych przez „mnożenie na krzyż" jest niepoprawne i prowadzi do błędnej odpowiedzi? Bo nie znamy z góry znaków wyrażeń, przez które mnożymy obie strony nierówności i nie wiemy, czy przypadkiem nie trzeba zmienić kierunku tej nierówności (przy mnożeniu przez liczbę ujemną). Dlatego nierówności wymierne należy rozwiązywać zgodnie z przedstawioną procedurą, a nie próbować dróg na skróty.

Nierówności monotoniczne - wstęp

Nierównością monotoniczną będziemy nazywać nierówność pomiędzy jedną z elementarnych funkcji monotonicznych (pierwiastek dowolnego stopnia, funkcje wykładnicze, logarytmiczne i cyklometryczne), a stałą.

Nierówności monotoniczne - wstęp

Nierównością monotoniczną będziemy nazywać nierówność pomiędzy jedną z elementarnych funkcji monotonicznych (pierwiastek dowolnego stopnia, funkcje wykładnicze, logarytmiczne i cyklometryczne), a stałą. Dokładniej, jest to nierówność typu $f(g(x)) > a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, g jest dowolną funkcją, ale najczęściej wielomianem lub funkcją wymierną, a f jest jedną z wspomnianych monotonicznych funkcji elementarnych.

Nierówności monotoniczne - wstęp

Nierównością monotoniczną będziemy nazywać nierówność pomiędzy jedną z elementarnych funkcji monotonicznych (pierwiastek dowolnego stopnia, funkcje wykładnicze, logarytmiczne i cyklometryczne), a stałą. Dokładniej, jest to nierówność typu $f(g(x)) > a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, g jest dowolną funkcją, ale najczęściej wielomianem lub funkcją wymierną, a f jest jedną z wspomnianych monotonicznych funkcji elementarnych.

Uwaga! To nie jest oficjalnie używana definicja matematyczna, tylko definicja na potrzeby tego kursu.

Nierówności monotoniczne - przykłady

$\sqrt[6]{x} < 2$;

Nierówności monotoniczne - wstęp

Nierównością monotoniczną będziemy nazywać nierówność pomiędzy jedną z elementarnych funkcji monotonicznych (pierwiastek dowolnego stopnia, funkcje wykładnicze, logarytmiczne i cyklometryczne), a stałą. Dokładniej, jest to nierówność typu $f(g(x)) > a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, g jest dowolną funkcją, ale najczęściej wielomianem lub funkcją wymierną, a f jest jedną z wspomnianych monotonicznych funkcji elementarnych.

Uwaga! To nie jest oficjalnie używana definicja matematyczna, tylko definicja na potrzeby tego kursu.

Nierówności monotoniczne - przykłady

$$\sqrt[6]{x} < 2; \ \left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-3} \geqslant 4;$$

Nierówności monotoniczne - wstęp

Nierównością monotoniczną będziemy nazywać nierówność pomiędzy jedną z elementarnych funkcji monotonicznych (pierwiastek dowolnego stopnia, funkcje wykładnicze, logarytmiczne i cyklometryczne), a stałą. Dokładniej, jest to nierówność typu $f(g(x)) > a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, g jest dowolną funkcją, ale najczęściej wielomianem lub funkcją wymierną, a f jest jedną z wspomnianych monotonicznych funkcji elementarnych.
Uwaga! To nie jest oficjalnie używana definicja matematyczna, tylko definicja na potrzeby tego kursu.

Nierówności monotoniczne - przykłady

$$\sqrt[6]{x} < 2; \ \left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-3} \geqslant 4; \ \log_3(2x-1) \leqslant 3;$$

Nierówności monotoniczne - wstęp

Nierównością monotoniczną będziemy nazywać nierówność pomiędzy jedną z elementarnych funkcji monotonicznych (pierwiastek dowolnego stopnia, funkcje wykładnicze, logarytmiczne i cyklometryczne), a stałą. Dokładniej, jest to nierówność typu $f(g(x)) > a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, g jest dowolną funkcją, ale najczęściej wielomianem lub funkcją wymierną, a f jest jedną z wspomnianych monotonicznych funkcji elementarnych.
Uwaga! To nie jest oficjalnie używana definicja matematyczna, tylko definicja na potrzeby tego kursu.

Nierówności monotoniczne - przykłady

$$\sqrt[6]{x} < 2; \ \left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-3} \geqslant 4; \ \log_3(2x-1) \leqslant 3; \ \operatorname{arcctg} \frac{x+1}{x-1} < \frac{\pi}{2}$$

Nierówności monotoniczne - wstęp

Jak zawsze, rozwiązywanie nierówności monotonicznej $f(g(x)) > (<, \geqslant, \leqslant) a$ zaczynamy od wyznaczenia dziedziny nierówności (czyli w tym przypadku dziedziny jej lewej strony). Dla ustalenia uwagi załóżmy, że mamy do czynienia z $f(g(x)) > a$.

Nierówności monotoniczne - wstęp

Jak zawsze, rozwiązywanie nierówności monotonicznej $f(g(x)) > (<, \geqslant, \leqslant) a$ zaczynamy od wyznaczenia dziedziny nierówności (czyli w tym przypadku dziedziny jej lewej strony). Dla ustalenia uwagi załóżmy, że mamy do czynienia z $f(g(x)) > a$. Następnie, możemy postępować na dwa sposoby.

Nierówności monotoniczne - wstęp

Jak zawsze, rozwiązywanie nierówności monotonicznej $f(g(x)) > (<, \geqslant, \leqslant)a$ zaczynamy od wyznaczenia dziedziny nierówności (czyli w tym przypadku dziedziny jej lewej strony). Dla ustalenia uwagi załóżmy, że mamy do czynienia z $f(g(x)) > a$.
Następnie, możemy postępować na dwa sposoby.
Po pierwsze możemy przedstawić a jako $f(b)$ uzyskując nierówność $f(g(x)) > f(b)$ i teraz możemy skorzystać z monotoniczności funkcji f.

Nierówności monotoniczne - wstęp

Jak zawsze, rozwiązywanie nierówności monotonicznej $f(g(x)) > (<, \geqslant, \leqslant)a$ zaczynamy od wyznaczenia dziedziny nierówności (czyli w tym przypadku dziedziny jej lewej strony). Dla ustalenia uwagi załóżmy, że mamy do czynienia z $f(g(x)) > a$. Następnie, możemy postępować na dwa sposoby.
Po pierwsze możemy przedstawić a jako $f(b)$ uzyskując nierówność $f(g(x)) > f(b)$ i teraz możemy skorzystać z monotoniczności funkcji f. Jeśli f jest rosnąca to dostajemy $g(x) > b$, a jeśli malejąca, to usuwając funkcję f musimy zmienić kierunek nierówności, więc otrzymamy $g(x) < b$.

Nierówności monotoniczne - wstęp

Jak zawsze, rozwiązywanie nierówności monotonicznej $f(g(x)) > (<, \geqslant, \leqslant) a$ zaczynamy od wyznaczenia dziedziny nierówności (czyli w tym przypadku dziedziny jej lewej strony). Dla ustalenia uwagi załóżmy, że mamy do czynienia z $f(g(x)) > a$. Następnie, możemy postępować na dwa sposoby.
Po pierwsze możemy przedstawić a jako $f(b)$ uzyskując nierówność $f(g(x)) > f(b)$ i teraz możemy skorzystać z monotoniczności funkcji f. Jeśli f jest rosnąca to dostajemy $g(x) > b$, a jeśli malejąca, to usuwając funkcję f musimy zmienić kierunek nierówności, więc otrzymamy $g(x) < b$.
Po drugie, możemy obie strony obłożyć funkcją f^{-1} otrzymując $f^{-1}(f(g(x))) = g(x) > f^{-1}(a)$, gdy f (i f^{-1}) jest rosnące lub $f^{-1}(f(g(x))) = g(x) < f^{-1}(a)$, gdy f (i f^{-1}) jest malejące.
Zazwyczaj będziemy używać tej pierwszej metody.

Nierówność monotoniczna - przykład 1

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\sqrt[6]{x} < 2.$$

Nierówność monotoniczna - przykład 1

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\sqrt[6]{x} < 2.$$

Zaczynamy od założenia, że $x \geqslant 0$ (dziedzina pierwiastka).

Nierówność monotoniczna - przykład 1

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\sqrt[6]{x} < 2.$$

Zaczynamy od założenia, że $x \geqslant 0$ (dziedzina pierwiastka). Następnie przekształcamy nierówność do postaci:

$$\sqrt[6]{x} < \sqrt[6]{64}.$$

Nierówność monotoniczna - przykład 1

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\sqrt[6]{x} < 2.$$

Zaczynamy od założenia, że $x \geqslant 0$ (dziedzina pierwiastka). Następnie przekształcamy nierówność do postaci:

$$\sqrt[6]{x} < \sqrt[6]{64}.$$

Jako, że $\sqrt[6]{x}$ jest funkcją rosnącą, możemy z obu stron nierówności usunąć pierwiastek i nie zmieniać jej kierunku. Ostatecznie otrzymujemy $x < 64$ i, po uwzględnieniu dziedziny, wynik:

$$x \in [0, 64).$$

Nierówność monotoniczna - przykład 2

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-3} \geqslant 4.$$

Nierówność monotoniczna - przykład 2

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-3} \geqslant 4.$$

Dziedziną nierówności jest $\mathbb{R}$.

Nierówność monotoniczna - przykład 2

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-3} \geqslant 4.$$

Dziedziną nierówności jest $\mathbb{R}$. Przekształcamy nierówność do postaci:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-3} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Nierówność monotoniczna - przykład 2

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-3} \geqslant 4.$$

Dziedziną nierówności jest $\mathbb{R}$. Przekształcamy nierówność do postaci:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-3} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Jako, że $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ jest funkcją malejącą, możemy z obu stron nierówności usunąć podstawę potęgi, zmieniając jednocześnie kierunek nierówności.

Nierówność monotoniczna - przykład 2

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-3} \geqslant 4.$$

Dziedziną nierówności jest $\mathbb{R}$. Przekształcamy nierówność do postaci:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-3} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Jako, że $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ jest funkcją malejącą, możemy z obu stron nierówności usunąć podstawę potęgi, zmieniając jednocześnie kierunek nierówności. Ostatecznie otrzymujemy $x^3 - 3 \leqslant -2$ i, po rozwiązaniu tej nierówności wielomianowej, wynik:

$$x \in (-\infty, 1).$$

Nierówność monotoniczna - przykład 3

Zadanie

$$\log_3(2x - 1) \leqslant 3.$$

Nierówność monotoniczna - przykład 3

Zadanie

$$\log_3(2x-1) \leqslant 3.$$

Zaczynamy od wyznaczenia dziedziny nierówności, którą jest zbiór $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (rozwiązanie nierówności $2x - 1 > 0$).

Nierówność monotoniczna - przykład 3

Zadanie

$$\log_3(2x-1) \leqslant 3.$$

Zaczynamy od wyznaczenia dziedziny nierówności, którą jest zbiór $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (rozwiązanie nierówności $2x - 1 > 0$). Przekształcamy nierówność do postaci:

$$\log_3(2x-1) \leqslant \log_3 27.$$

Nierówność monotoniczna - przykład 3

Zadanie

$$\log_3(2x-1) \leqslant 3.$$

Zaczynamy od wyznaczenia dziedziny nierówności, którą jest zbiór $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (rozwiązanie nierówności $2x-1>0$). Przekształcamy nierówność do postaci:

$$\log_3(2x-1) \leqslant \log_3 27.$$

Jako, że $\log_3 x$ jest funkcją rosnącą, możemy z obu stron nierówności usunąć logarytm i nie zmieniać jej kierunku.

Nierówność monotoniczna - przykład 3

Zadanie

$$\log_3(2x-1) \leqslant 3.$$

Zaczynamy od wyznaczenia dziedziny nierówności, którą jest zbiór $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (rozwiązanie nierówności $2x-1>0$). Przekształcamy nierówność do postaci:

$$\log_3(2x-1) \leqslant \log_3 27.$$

Jako, że $\log_3 x$ jest funkcją rosnącą, możemy z obu stron nierówności usunąć logarytm i nie zmieniać jej kierunku. Ostatecznie otrzymujemy $2x-1 \leqslant 27$ i, po rozwiązaniu tej nierówności i uwzględnieniu dziedziny, wynik:

$$x \in (\frac{1}{2}, 14].$$

Nierówność monotoniczna - przykład 4

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\operatorname{arcctg} \frac{x+1}{x-1} < \frac{\pi}{2}.$$

Nierówność monotoniczna - przykład 4

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\operatorname{arcctg} \frac{x+1}{x-1} < \frac{\pi}{2}.$$

Dziedziną nierówności jest $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Nierówność monotoniczna - przykład 4

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\operatorname{arcctg} \frac{x+1}{x-1} < \frac{\pi}{2}.$$

Dziedziną nierówności jest $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Przekształcamy nierówność do postaci:

$$\operatorname{arcctg} \frac{x+1}{x-1} < \operatorname{arcctg} 0.$$

Nierówność monotoniczna - przykład 4

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\operatorname{arcctg} \frac{x+1}{x-1} < \frac{\pi}{2}.$$

Dziedziną nierówności jest $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Przekształcamy nierówność do postaci:

$$\operatorname{arcctg} \frac{x+1}{x-1} < \operatorname{arcctg} 0.$$

Jako, że $\operatorname{arcctg} x$ jest funkcją malejącą, możemy z obu stron nierówności usunąć arcctg, zmieniając jednocześnie kierunek nierówności.

Nierówność monotoniczna - przykład 4

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\operatorname{arcctg} \frac{x+1}{x-1} < \frac{\pi}{2}.$$

Dziedziną nierówności jest $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Przekształcamy nierówność do postaci:

$$\operatorname{arcctg} \frac{x+1}{x-1} < \operatorname{arcctg} 0.$$

Jako, że $\operatorname{arcctg} x$ jest funkcją malejącą, możemy z obu stron nierówności usunąć arcctg, zmieniając jednocześnie kierunek nierówności. Ostatecznie otrzymujemy $\frac{x+1}{x-1} > 0$ i, po rozwiązaniu tej nierówności wielomianowej i uwzględnieniu dziedziny, wynik:

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Nierówności trygonometryczne

Nierównością trygonometryczną będziemy nazywać nierówność pomiędzy jedną z funkcją trygonometryczną, a stałą.

Nierówności trygonometryczne

Nierównością trygonometryczną będziemy nazywać nierówność pomiędzy jedną z funkcją trygonometryczną, a stałą. Dokładniej, jest to nierówność typu $f(g(x)) > a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, g jest dowolną funkcją, ale najczęściej wielomianem lub funkcją wymierną, a f jest funkcją trygonometryczną.
Tego typu nierówności rozwiązywali Państwo w szkole średniej - najczęściej metodą graficzną. Przypomnimy ją na przykładzie.

Nierówność trygonometryczna - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\cos(3x - 1) > \frac{1}{2}.$$

Nierówność trygonometryczna - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\cos(3x-1) > \frac{1}{2}.$$

Dziedziną nierówności jest oczywiście $\mathbb{R}$.

Nierówność trygonometryczna - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$\cos(3x - 1) > \frac{1}{2}.$$

Dziedziną nierówności jest oczywiście $\mathbb{R}$. Najpierw wprowadzamy zmienną pomocniczą $t = 3x - 1$ za funkcję wewnętrzną po lewej stronie nierówności. Rozwiązujemy nierówność $\cos t > \frac{1}{2}$ na dowolnym przedziale długości 2π np. $[-\pi, \pi]$.

Nierówność trygonometryczna - przykład

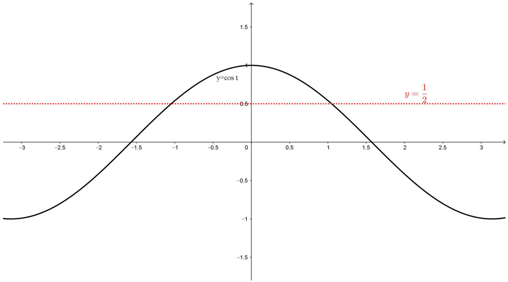
Zadanie

Rozwiązać nierówność:

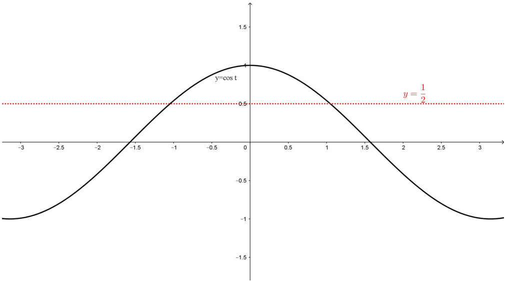
$$\cos(3x - 1) > \frac{1}{2}.$$

Dziedziną nierówności jest oczywiście $\mathbb{R}$. Najpierw wprowadzamy zmienną pomocniczą $t = 3x - 1$ za funkcję wewnętrzną po lewej stronie nierówności. Rozwiązujemy nierówność $\cos t > \frac{1}{2}$ na dowolnym przedziale długości 2π np. $[-\pi, \pi]$. Musimy wiedzieć (ze szkoły), że równość $\cos t = \frac{1}{2}$ zachodzi w tym przedziale dla $t = -\frac{\pi}{3}$ i $t = \frac{\pi}{3}$. Uzbrojeni w tę wiedzę możemy naszkicować wykres...

Nierówność trygonometryczna - przykład

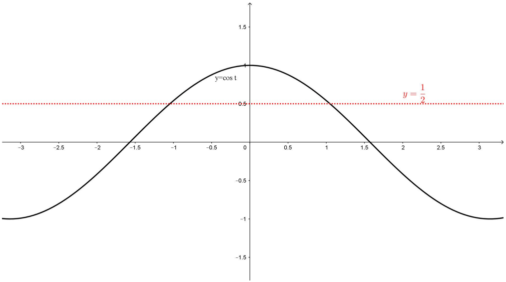


Nierówność trygonometryczna - przykład



.
...i zobaczyć na nim, że w tym przedziale $\cos t > \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

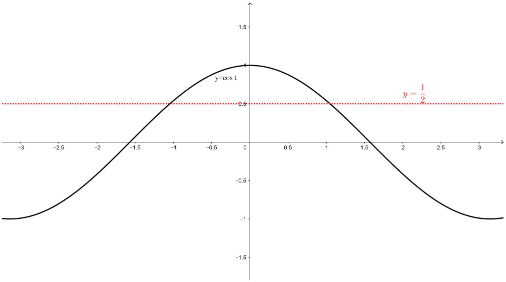
Nierówność trygonometryczna - przykład



.

...i zobaczyć na nim, że w tym przedziale $\cos t > \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.
Uwzględniając, że cos jest funkcją 2π-okresową, otrzymujemy
$t \in (-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

Nierówność trygonometryczna - przykład



.

...i zobaczyć na nim, że w tym przedziale $\cos t > \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Uwzględniając, że cos jest funkcją 2π-okresową, otrzymujemy $t \in (-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, dla $k \in \mathbb{Z}$. Teraz wystarczy powrócić do zmiennej x by otrzymać $x \in (-\frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k\pi)$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

Uwagi końcowe

W ten sposób kończymy przegląd elementarnych nierówności. Umiejętności z tego wykładu będą Państwu koniecznie potrzebne w przyszłych zadaniach, ale będą też wystarczające, przynajmniej jeśli chodzi o nierówności, które mogą się pojawić na sprawdzianach i egzaminach.
W ramach kursu mogą pojawić się też bardziej skomplikowane nierówności, ale zazwyczaj będą zawierały pewne wskazówki co do rozwiązań i będzie można w nich używać nieco innych technik. Przypomnimy sobie o tym omawiając zagadnienie ciągłości funkcji i własność Darboux.