

26 II 2022

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut+dodatkowe 15 minut na wysłanie zadań na platformę moodle. Zадania przesłane po terminie bez zgłoszenia problemów technicznych będą miały obniżoną ocenę. Przekroczenie czasu o ponad pół godziny spowoduje uniemożliwienie oddania zadania.
2. Formą przeprowadzania egzaminu jest odpowiednie zadanie w platformie moodle, warunkiem zaliczenia jest przesłanie rozwiązań zadań w czytelnej postaci w ramach tego zadania.
3. W każdym pliku z rozwiązaniami powinien znaleźć się podpis: imię i nazwisko. Nazwy plików powinny być odnosić się do numerów zadań, które w danym pliku są rozwiązywane.
4. Dopuszczalne formaty wysyłanych plików to: pdf, doc, docx, png, jpg, jpeg, bmp. Przed wylogowaniem z egzaminu należy się upewnić, że pliki są w postaci czytelnej, w wypadkach problemów, skonsultować się z osobą prowadzącą egzamin.
5. Przed wysłaniem proszę się upewnić, że zaznaczyli Państwo oświadczenie o pracy samodzielnej i potwierdzenie, że to jest ostateczna wersja.
6. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.

Zadania:

1. (400 punktów) W menu restauracji „U Eulera” znajduje się 12 zup, 30 dań głównych i 18 deserów (potrawy te są rozróżnialne).
 - a) Pewnego dnia 200 nierozróżnialnych klientów zamawiało dania główne. Każde danie główne zostało zamówione przez co najmniej 2 klientów. Na koniec dnia przedstawiono właścicielowi restauracji listę z informacją, ile egzemplarzy każdego dania zostało zamówionych. Ile jest różnych list spełniających te założenia?
 - b) Grupa 5 znajomych smakoszy: Atanazy, Bądzimir, Cieszygor, Dzierżykraj i Eulogiusz codziennie spotykała się w tej restauracji na obiedzie. Najpierw, wszyscy poza Cieszygorem zamawiali zupę i zawsze każdy inną. Następnie zachodziła jedna z dwóch możliwości: albo każdy zamiawał danie główne na własną rękę (zamówienia dań głównych mogły się powtarzać, w dotychczasowych zamówieniach jest istotne, kto dostał którą potrawę) lub zamawiali wspólny stół w postaci 8 różnych dań głównych do wyboru, z których korzystali wszyscy według gustu. W końcu, jako stałym klientom, kucharz pakował im na wynos 5 różnych deserów - przy czym deserami tymi dzielili się na zewnątrz, więc dla kelnerów nie było istotne, jak te desery rozdzielić. Na ile różnych układów podawania potraw smakoszom muszą być przygotowani kelnerzy?
 - c) W restauracji tej pieczołowicie obliczano liczbę gości. Gdy właściciel restauracji dowiedział się, że właśnie restaurację odwiedził 1024-ty klient, z tej okrągłej okazji ustanowił nagrody-upominki dla kolejnych gości - przy czym tylko aż do przybycia klienta numer 4096 i tylko dla klientów, których numery były podzielne przez 7, 22 lub 55. Ile upominków musiał przygotować właściciel?
 - d) W pewnym momencie tak się złożyło, że w restauracji siedziało 40 klientów, z których 7 jadło właśnie zupę, 17 - danie główne, 6 - deser, a pozostali czekali na obsługę. Na ile sposobów klienci (rozróżnialni) mogli się podzielić na takie grupy?
2. (400 punktów) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:

$$s_{n+1} = -3s_n + 10s_{n-1} + 7 \cdot 2^n; s_0 = 8, s_1 = -3.$$

3. a) (200 punktów) W algorytmie RSA kluczem publicznym jest para $(119, 35)$. Obliczyć klucz prywatny używany do dekodowania informacji oraz obliczyć, jakiej jednostce tekstu jawnego odpowiada w szyfrogramie jednostka o numerze 5.

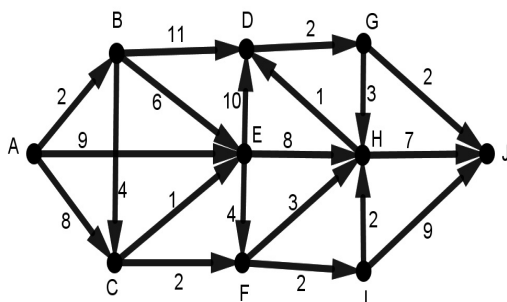
b) (100 punktów) Wyznaczyć $\varphi(35640)$.

c) (100 punktów) Wyznaczyć resztę z dzielenia liczby 15^{2022} przez 32.

4. (400 punktów)

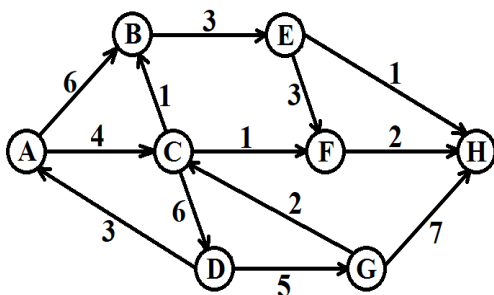
a) Zastosować algorytm Dijkstry ze wskaźnikami do znalezienia najkrótszej drogi pomiędzy wierzchołkami A i J poniższego grafu. Przebieg algorytmu zapisać w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać tę drogę i podać jej wagę.

Nr etapu	Zbiór L	$d(B)p(B)$	$d(C)p(C)$...	$d(J)p(J)$
----------	-----------	------------	------------	-----	------------



b) Za pomocą algorytmu Edmondsa-Karpa znaleźć maksymalny przepływ pomiędzy wierzchołkami A oraz H w poniższym grafie skierowanym. Uzupełnić odpowiednią tabelę przebiegu algorytmu.

Nr etapu	Ścieżka powiększająca	Przepływ	Alternatywy
----------	-----------------------	----------	-------------



5. (400 punktów) a) Podać przykład kongruencji liniowej, która nie ma rozwiązań oraz kongruencji liniowej, która ma więcej niż jedno rozwiązanie. Jeśli któryś z tych przypadków jest niemożliwy, wyjaśnić dlaczego. Podać warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania kongruencji liniowej (twierdzenie o rozwiązalności kongruencji).

b) Narysować spójne grafy proste o co najmniej 6 krawędziach spełniające następujące założenia (lub uzasadnić, że taki graf nie istnieje):

I. Graf, dla którego indeks chromatyczny jest mniejszy od liczby chromatycznej o dokładnie 2.

II. Graf, dla którego liczba chromatyczna jest mniejsza od indeksu chromatycznego o dokładnie 2.

III. Graf dwudzielny, dla którego liczba chromatyczna i indeks chromatyczny są równe.

IV. Graf, który nie jest dwudzielny, a jego liczba chromatyczna wynosi 2.