

5 II 2022

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut+dodatkowe 15 minut na wysłanie zadań na platformę moodle. Zadania przesłane po terminie bez zgłoszenia problemów technicznych będą miały obniżoną ocenę. Przekroczenie czasu o ponad pół godziny spowoduje uniemożliwienie oddania zadania.
 2. Formą przeprowadzania egzaminu jest odpowiednie zadanie w platformie moodle, warunkiem zaliczenia jest przesłanie rozwiązań zadań w czytelnej postaci w ramach tego zadania.
 3. W każdym pliku z rozwiązaniami powinien znaleźć się podpis: imię i nazwisko. Nazwy plików powinny być odnosić się do numerów zadań, które w danym pliku są rozwiązywane.
 4. Dopuszczalne formaty wysyłanych plików to: pdf, doc, docx, png, jpg, jpeg, bmp. Przed wylogowaniem z egzaminu należy się upewnić, że pliki są w postaci czytelnej, w wypadkach problemów, skonsultować się z osobą prowadzącą egzamin.
 5. Przed wysłaniem proszę się upewnić, że zaznaczyli Państwo oświadczenie o pracy samodzielnej i potwierdzenie, że to jest ostateczna wersja.
 6. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.
-

Zadania:

1. (400 punktów) Inwestorzy zarejestrowani na Giełdzie Dyskretnej handlują czterema kryptowalutami: Eulereum, Leonardo, PermutCoin i Graffle.
 - a) Grupa 50 inwestorów podejmuje decyzję o zamówieniu: każdy z nich albo wstrzymuje się od zakupu, albo kupuje dokładnie jedną jednostkę jednej z czterech kryptowalut. Po podjęciu decyzji przez wszystkich, podliczają ile jednostek każdej waluty chcą kupić członkowie grupy w sumie i składają wspólne zamówienie (więc na potrzeby realizacji tego zamówienia członkowie grupy są nierozróżnialni). Ile jest możliwych koszyków walut, które grupa jako całość zamówi, jeśli wiemy, że co najmniej 5 inwestorów zakupi jednostkę Eulereum, a co najmniej 3 wstrzyma się od zakupu?
 - b) Znowu każdy z grupy 50 inwestorów zamawia jednostkę jednej z kryptowalut lub wstrzymuje się od zakupu. Tym razem jednak każdy składa swoje zamówienie indywidualnie (więc na potrzeby realizacji zamówień członkowie grupy są rozróżnialni). Na ile sposobów może być zrealizowane to zamówienie, jeśli wiemy, że dokładnie 11 inwestorów zamówi Eulereum, 5 zamówi Leonardo, 16 - PermutCoina, a 6 - Graffle (pozostali wstrzymają się od zakupu)?
 - c) Ze wspomnianej grupy 50 inwestorów, 19 inwestuje w Eulereum, 30 w Graffle, a 33 w PermutCoina. 13 inwestuje zarówno w PermutCoina jak i w Eulereum, 16 - w Graffle i PermutCoina, a 11 w Graffle i Eulereum. Ilu inwestuje we wszystkie trzy waluty wymienione w tym podpunkcie jednocześnie, jeśli wiemy, że każdy inwestuje w co najmniej jedną z tych walut?
 - d) Pewien inwestor planuje następującą strategię transakcyjną na najbliższe 2 tygodnie: przez 8 kolejnych dni kupuje dziennie 1 jednostkę jednej z 4 kryptowalut (wybory w kolejnych dniach mogą się powtarzać). Dziewiątego dnia wykonuje jednocześnie 3 spośród następujących działań: zakup jednostki jednej z 4 kryptowalut, sprzedaż jednostki jednej z 4 kryptowalut lub wstrzymanie się od handlu (nie wykonuje 2 takich samych działań, ale może zdecydować, że dwoma z nich będzie kupno i sprzedaż tej samej waluty). Przez ostatnie 5 dni kolejno wykonuje jedno z działań spośród których wybierał dziewiątego dnia (ale w każdy z tych ostatnich 5 dni wykonuje inne działanie). Na ile sposobów może zrealizować swoją strategię, jeśli zakładamy, że na początku posiada co najmniej 50 jednostek każdej z kryptowalut?

2. (400 punktów) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:

$$s_{n+1} = 11s_n - 24s_{n-1} + 6 \cdot 5^n; s_0 = 4, s_1 = -8.$$

3. a) (200 punktów) Czy istnieją liczby całkowite x, y spełniające równanie: $1925x + 8580y = 165$? Jeśli tak, wyznaczyć je za pomocą odpowiedniego algorytmu, jeśli nie, uzasadnić dlaczego.

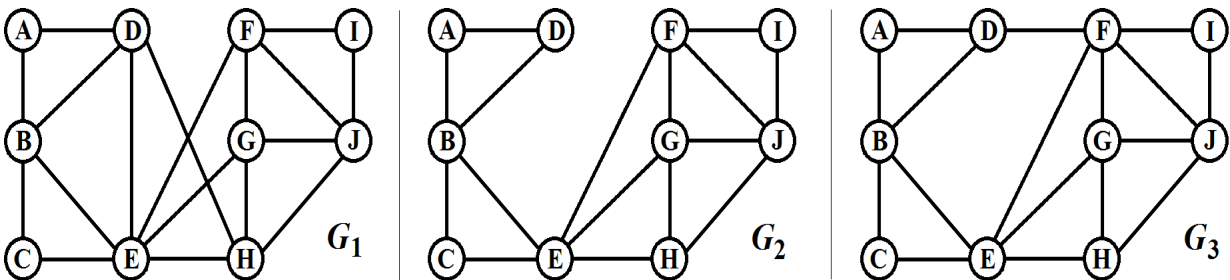
b) (200 punktów) Rozwiązać układ kongruencji:

$$\begin{cases} 5x + 3y \equiv_{23} \varphi(88) \\ 3x - 2y \equiv_{23} 22 \end{cases}$$

4. (400 punktów)

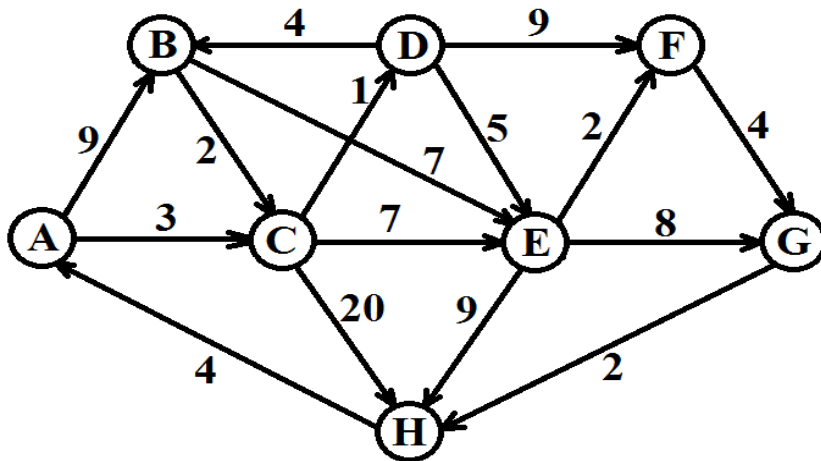
a) Dla każdego z poniższych grafów (G_1, G_2, G_3) sprawdzić, czy występuje w nim cykl lub droga Eulera. Odpowiedź uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenie. Jeśli dla któregoś z grafów będzie istnieć droga Eulera, ale nie cykl Eulera, wykorzystać algorytm Fleury'ego do znalezienia jednej z tych dróg zapisując przebieg algorytmu w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać odpowiedź w postaci ciągu kolejnych odwiedzanych wierzchołków na tej drodze.

Nr etapu	Wybrany wierzchołek	Alternatywy
----------	---------------------	-------------



b) Zastosować algorytm Dijkstry ze wskaźnikami do znalezienia najkrótszej drogi pomiędzy wierzchołkami A i H poniższego grafu oraz jej długości. Przebieg algorytmu zapisać w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Najkrótszą drogę zapisać w postaci ciągu kolejnych wierzchołków na tej drodze.

Nr etapu	Zbiór L	d(B)p(B)	d(C)p(C)	...	d(H)p(H)
----------	---------	----------	----------	-----	----------



5. (400 punktów) a) Wyjaśnić pojęcia: graf dwudzielny, skojarzenie pełne, podać wypowiedź twierdzenia Halla i narysować spójny graf dwudzielny o co najmniej 8 wierzchołkach, dla którego $|V_1| \leq |V_2|$, ale skojarzenie pełne nie istnieje (i uzasadnić brak tego skojarzenia za pomocą twierdzenia Halla).

b) Wyjaśnić, co to jest algorytm rekurencyjny i podać przykład takiego algorytmu.