Egzamin z matematyki dyskretnej, dzienne, termin 1

---

1 II 2022

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut. Nikt nie wychodzi w ciągu ostatnich 10 minut.

2. Podczas egzaminu wolno korzystać jedynie z kalkulatora, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od prowadzących egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno używać telefonów komórkowych/smartfonów itp. urządzeń do kontaktu ze światem zewnętrznym i własnych kartek.

3. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem.

4. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.

Zadania:

1. (400 punktów) W Zimowych Igrzyskach Olimpijskich w Graficach biorą udział sportowcy ze 120 państw, a zawody odbywają się na 6 obiektach: trasie zjazdowej, trasie biegowej, skoczni narciarskiej, torze łyżwiarskim, lodowisku i torze saneczkarsko-bobslejowym. Dyscypliny, w których sportowcy rywalizują, są podzielone na 3 typy: narciarskie, łyżwiarskie i saneczkarskie.

a) 90 krajów jest reprezentowanych w dyscyplinach narciarskich, 73 w łyżwiarskich, a 53 w saneczkarskich. Zarówno w dyscyplinach łyżwiarskich, jak i saneczkarskich startują sportowcy z 41 państw, w narciarskich i saneczkarskich - ze 42 państw, a w łyżwiarskich i narciarskich - z 50 państw. Ile krajów wystawiło swoich reprezentatów we wszystkich trzech typach dyscyplin?

b) Każdy z grupy 30 kibiców zamawia bilet wstępu trzeciego dnia Igrzysk na dokładnie jeden z obiektów olimpijskich. Po podjęciu decyzji przez wszystkich, podliczają ile biletów na każdy obiekt chcą kupić członkowie grupy w sumie i składają wspólne zamówienie, w którym nie jest sprecyzowane kto z nich dostanie który bilet. Ile jest możliwych koszyków biletów, które grupa jako całość zamówi, jeśli wiemy, że co najmniej 3 kibiców wybiera się na skocznię, a co najmniej 5 na lodowisko?

c) Z kolei czwartego dnia Igrzysk, z tej samej grupy 30 kibiców, dokładnie 4 zamawia bilet na tor łyżwiarski, 3 na trasy biegowe, 8 na zjazdowe, 6 na lodowisko, 5 na skocznię, a pozostali na tor saneczkowy. Tym razem jednak każdy składa swoje zamówienie indywidualnie (wiadomo kto dostaje każdy bilet). Ile sposobów rozdzielenia biletów pomiędzy nich spełnia takie warunki?

d) Czteroosobowa rodzina kibiców planuje zakupy biletów na pierwsze 6 dni Igrzysk. Pierwszego dnia każdy z nich chce zamówić bilet na inny obiekt (i istotne jest kto jaki bilet dostanie). W każdy z następnych 4 dni planują spędzać czas razem na jednym z obiektów, więc na każdy z tych dni wybierają rodzinny bilet na jeden obiekt (obiekty te mogą się powtarzać). Szóstego dnia planują również iść razem, ale nie zamierzają spędzać całego dnia w jednym miejscu, więc chcą nabyć superbilet rodzinny, który pozwala im tego dnia dowolnie wchodzić na 3 wybrane areny zmagań (te areny muszą być jednak wskazane w momencie zamówienia). Na ile sposobów mogą zrealizować zamówienie spełniające te warunki?

2. (400 punktów) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:

$$s_{n+1} = 5s_n + 6s_{n-1} + 12 \cdot (-3)^n; s_0 = 6, s_1 = 5.$$

3. a) (200 punktów) Czy istnieją liczby całkowite x, y spełniające równanie: $8568x + 2912y = 224$. Jeśli tak, wyznaczyć je za pomocą odpowiedniego algorytmu, jeśli nie, uzasadnić dlaczego.

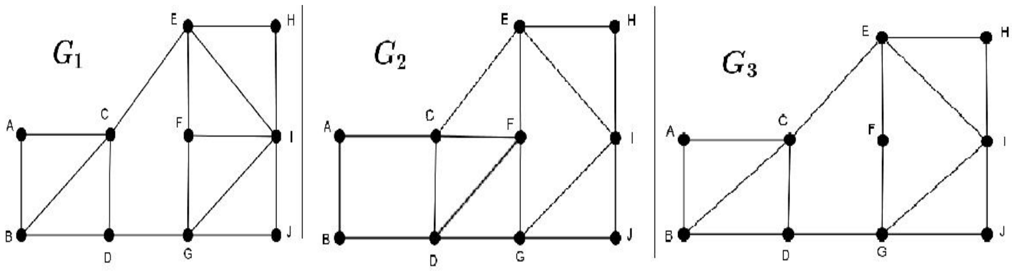
b) (200 punktów) Rozwiązać układ kongruencji:

$$\begin{cases} 2x + 3y \equiv_{29} \varphi(99) \\ 5x - 4y \equiv_{29} 17 \end{cases}$$

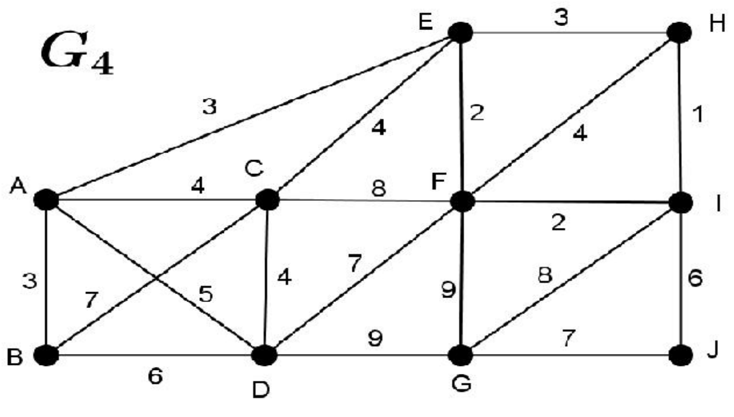
4. (400 punktów)

a) Dla każdego z grafów G_1, G_2, G_3 sprawdzić, czy występuje w nim cykl lub droga Eulera. Odpowiedź uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenie. Jeśli dla któregoś z grafów będzie istnieć droga Eulera, ale nie cykl Eulera, wykorzystać algorytm Fleury'ego do znalezienia jednej z tych dróg zapisując przebieg algorytmu w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać odpowiedź w postaci ciągu kolejnych odwiedzanych wierzchołków na tej drodze.

Nr etapu	Wybrany wierzchołek	Alternatywy



b) Znaleźć minimalne drzewo spinające dla poniższego grafu za pomocą algorytmu Kruskala oraz za pomocą algorytmu Prima. Przebieg każdego algorytmu zapisać w odpowiadającej mu tabeli. Jeśli algorytm trzeba rozpocząć od jakiegoś wierzchołka, rozpocząć należy od A. Jeśli algorytm wymaga uszeregowania krawędzi, wypisać to uszeregowanie. Podpisać algorytmy. Podać wagę minimalnych drzew spinających tego grafu.



Poniżej forma tabeli dla odpowiednich algorytmów. W trzeciej kolumnie dla każdego algorytmu wybrać jedną ze wskazanych opcji.

Nr etapu	Wybrana krawędź	Krawędzie odrzucone przed wyborem/Alternatywy

5. (400 punktów) a) Narysować spójne grafy proste o co najmniej 6 krawędziach spełniające następujące założenia (lub uzasadnić, że taki graf nie istnieje):

I. Graf dwudzielny, który jest grafem Eulera.

II. Graf, dla którego liczba chromatyczna jest większa od indeksu chromatycznego.

III. Graf dwudzielny, który nie jest grafem Eulera.

IV. Graf hamiltonowski, który jest drzewem.

b) Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.