3a. Pochodne - linearyzacja i różniczka

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

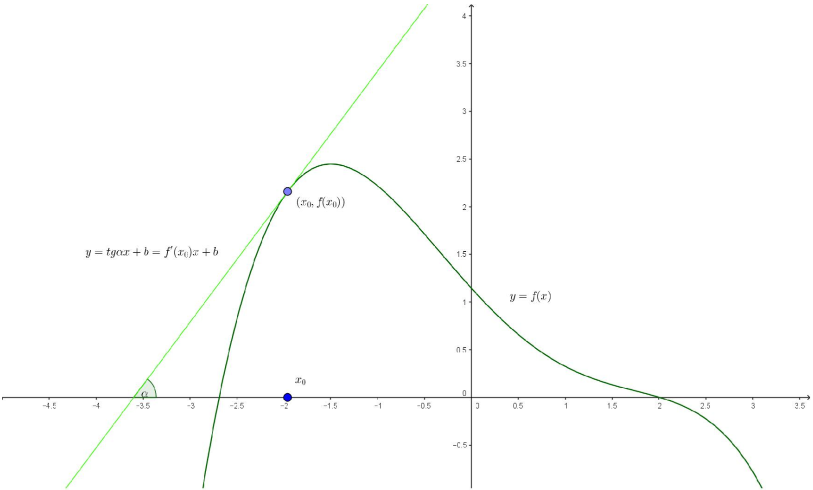
Pochodna - interpretacja geometryczna

Jak mówiliśmy na początku, obliczenie pochodnej pozwala na zdobycie informacji o tempie przyrostu danej funkcji. W jaki sposób jedna informacja przekłada się na drugą? Otóż na podstawie następującego twierdzenia:

Interpretacja geometryczna pochodnej

Pochodna funkcji $f'(x_0)$ równa się tangensowi kąta między osią Ox a styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, czyli współczynnikowi kierunkowemu tej prostej stycznej.

Pochodna - interpretacja geometryczna



$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$

Interpretacja geometryczna - wniosek o monotoniczności

Z tej obserwacji natychmiast dostajemy chyba najważniejsze twierdzenie związane z zastosowaniami pochodnej:

Pochodna a monotoniczność

Jeśli pochodna funkcji f w jakimś przedziale jest dodatnia, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca. Jeśli pochodna funkcji f w jakimś przedziale jest ujemna, to funkcja f jest w tym przedziale malejąca.

Interpretacja geometryczna - wniosek o monotoniczności

Z tej obserwacji natychmiast dostajemy chyba najważniejsze twierdzenie związane z zastosowaniami pochodnej:

Pochodna a monotoniczność

Jeśli pochodna funkcji f w jakimś przedziale jest dodatnia, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca. Jeśli pochodna funkcji f w jakimś przedziale jest ujemna, to funkcja f jest w tym przedziale malejąca.

Dodatkowo, im większa jest wartość pochodnej danej funkcji to tym szybciej dana funkcja rośnie (gdy pochodna jest dodatnia) lub tym wolniej maleje (jeśli pochodna jest ujemna).

Interpretacja geometryczna - wniosek o monotoniczności

Z tej obserwacji natychmiast dostajemy chyba najważniejsze twierdzenie związane z zastosowaniami pochodnej:

Pochodna a monotoniczność

Jeśli pochodna funkcji f w jakimś przedziale jest dodatnia, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca. Jeśli pochodna funkcji f w jakimś przedziale jest ujemna, to funkcja f jest w tym przedziale malejąca.

Dodatkowo, im większa jest wartość pochodnej danej funkcji to tym szybciej dana funkcja rośnie (gdy pochodna jest dodatnia) lub tym wolniej maleje (jeśli pochodna jest ujemna).
Do tego twierdzenia powrócimy później - na razie tylko je zapamiętajmy.

Pochodna - interpretacja geometryczna - przykład

Zadanie

Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji: $f(x) = x^2$ w punkcie $(-2, 4)$.

Pochodna - interpretacja geometryczna - przykład

Zadanie

Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji: $f(x) = x^2$ w punkcie $(-2, 4)$.

Prosta styczna do wykresu funkcji ma równanie $y = ax + b$.

Pochodna - interpretacja geometryczna - przykład

Zadanie

Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji: $f(x) = x^2$ w punkcie $(-2, 4)$.

Prosta styczna do wykresu funkcji ma równanie $y = ax + b$. Wiemy, że dla $x_0 = -2$, musi być $a = f'(-2)$.

Pochodna - interpretacja geometryczna - przykład

Zadanie

Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji: $f(x) = x^2$ w punkcie $(-2, 4)$.

Prosta styczna do wykresu funkcji ma równanie $y = ax + b$. Wiemy, że dla $x_0 = -2$, musi być $a = f'(-2)$. $f'(x) = 2x$, zatem
$f'(-2) =$

Pochodna - interpretacja geometryczna - przykład

Zadanie

Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji: $f(x) = x^2$ w punkcie $(-2, 4)$.

Prosta styczna do wykresu funkcji ma równanie $y = ax + b$. Wiemy, że dla $x_0 = -2$, musi być $a = f'(-2)$. $f'(x) = 2x$, zatem $f'(-2) = -4$.

Pochodna - interpretacja geometryczna - przykład

Zadanie

Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji: $f(x) = x^2$ w punkcie $(-2, 4)$.

Prosta styczna do wykresu funkcji ma równanie $y = ax + b$. Wiemy, że dla $x_0 = -2$, musi być $a = f'(-2)$. $f'(x) = 2x$, zatem $f'(-2) = -4$. Zatem mamy równanie $y = -4x + b$.

Pochodna - interpretacja geometryczna - przykład

Zadanie

Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji: $f(x) = x^2$ w punkcie $(-2, 4)$.

Prosta styczna do wykresu funkcji ma równanie $y = ax + b$. Wiemy, że dla $x_0 = -2$, musi być $a = f'(-2)$. $f'(x) = 2x$, zatem $f'(-2) = -4$. Zatem mamy równanie $y = -4x + b$.
Żeby obliczyć b musimy wstawić punkt $(-2, 4)$ do równania prostej (wszak prosta styczna musi przez ten punkt przechodzić).

Pochodna - interpretacja geometryczna - przykład

Zadanie

Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji: $f(x) = x^2$ w punkcie $(-2, 4)$.

Prosta styczna do wykresu funkcji ma równanie $y = ax + b$. Wiemy, że dla $x_0 = -2$, musi być $a = f'(-2)$. $f'(x) = 2x$, zatem $f'(-2) = -4$. Zatem mamy równanie $y = -4x + b$.
Żeby obliczyć b musimy wstawić punkt $(-2, 4)$ do równania prostej (wszak prosta styczna musi przez ten punkt przechodzić).Dostajemy $4 = -4 \cdot (-2) + b$, czyli

Pochodna - interpretacja geometryczna - przykład

Zadanie

Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji: $f(x) = x^2$ w punkcie $(-2, 4)$.

Prosta styczna do wykresu funkcji ma równanie $y = ax + b$. Wiemy, że dla $x_0 = -2$, musi być $a = f'(-2)$. $f'(x) = 2x$, zatem $f'(-2) = -4$. Zatem mamy równanie $y = -4x + b$.
Żeby obliczyć b musimy wstawić punkt $(-2, 4)$ do równania prostej (wszak prosta styczna musi przez ten punkt przechodzić).Dostajemy $4 = -4 \cdot (-2) + b$, czyli $b = -4$.

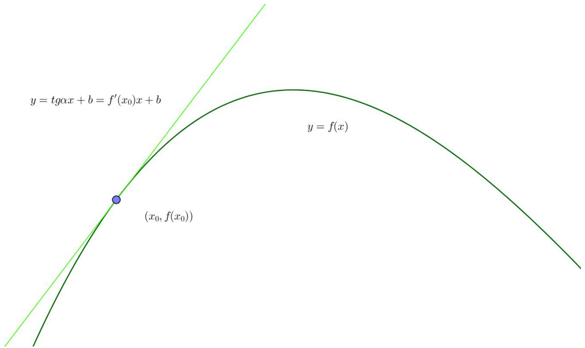
Pochodna - interpretacja geometryczna - przykład

Zadanie

Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji: $f(x) = x^2$ w punkcie $(-2, 4)$.

Prosta styczna do wykresu funkcji ma równanie $y = ax + b$. Wiemy, że dla $x_0 = -2$, musi być $a = f'(-2)$. $f'(x) = 2x$, zatem $f'(-2) = -4$. Zatem mamy równanie $y = -4x + b$.
Żeby obliczyć b musimy wstawić punkt $(-2, 4)$ do równania prostej (wszak prosta styczna musi przez ten punkt przechodzić).Dostajemy $4 = -4 \cdot (-2) + b$, czyli $b = -4$.
Ostatecznie, $y = -4x - 4$ jest równaniem szukanej prostej stycznej.

Pochodna - interpretacja geometryczna



Prosta styczna do wykresu jest w pewnym (zazwyczaj małym) otoczeniu „bardzo podobna" do wykresu, a współrzędne punktów na tej prostej oblicza się dużo łatwiej niż na wykresie funkcji.

Różniczka - definicja

Dlatego możemy w dobrym przybliżeniu obliczać wartości funkcji „w okolicy" punktu, w którym jej wartość znamy, dzięki *różniczce*, czyli „liniowemu" przybliżeniu naszej funkcji.

Różniczka - definicja

Dlatego możemy w dobrym przybliżeniu obliczać wartości funkcji „w okolicy" punktu, w którym jej wartość znamy, dzięki *różniczce*, czyli „liniowemu" przybliżeniu naszej funkcji.

Różniczka

Niech funkcja f ma pochodną w punkcie x_0. *Różniczką* funkcji f w pobliżu punktu x_0 nazywamy funkcję $df_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która przyrostowi argumentu $\Delta x = x - x_0$ przypisuje wartość $df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Różniczka - twierdzenie i przykład

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Różniczka - twierdzenie i przykład

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $(4,01)^2$.

Różniczka - twierdzenie i przykład

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $(4,01)^2$.

Obliczamy przybliżoną wartość funkcji $f(x) = x^2$ w pobliżu $x_0 = 4$.

Różniczka - twierdzenie i przykład

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $(4,01)^2$.

Obliczamy przybliżoną wartość funkcji $f(x) = x^2$ w pobliżu $x_0 = 4$. Zatem musimy obliczyć $f'(x) = 2x$, czyli $f'(4) = 8$.

Różniczka - twierdzenie i przykład

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $(4,01)^2$.

Obliczamy przybliżoną wartość funkcji $f(x) = x^2$ w pobliżu $x_0 = 4$. Zatem musimy obliczyć $f'(x) = 2x$, czyli $f'(4) = 8$. Stąd:

$$f(4,01) \approx f(4) + df_4(4,01 - 4) =$$

Różniczka - twierdzenie i przykład

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $(4,01)^2$.

Obliczamy przybliżoną wartość funkcji $f(x) = x^2$ w pobliżu $x_0 = 4$. Zatem musimy obliczyć $f'(x) = 2x$, czyli $f'(4) = 8$. Stąd:

$$f(4,01) \approx f(4) + df_4(4,01 - 4) = 4^2 + 8 \cdot (0,01) =$$

Różniczka - twierdzenie i przykład

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $(4,01)^2$.

Obliczamy przybliżoną wartość funkcji $f(x) = x^2$ w pobliżu $x_0 = 4$. Zatem musimy obliczyć $f'(x) = 2x$, czyli $f'(4) = 8$. Stąd:

$$f(4,01) \approx f(4) + df_4(4,01 - 4) = 4^2 + 8 \cdot (0,01) = 16,08.$$

Różniczka - przykład 2

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Różniczka - przykład 2

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $\mathrm{arcctg}(-0,02)$.

Różniczka - przykład 2

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $\operatorname{arcctg}(-0,02)$.

Obliczamy przybliżoną wartość funkcji $f(x) = \operatorname{arcctg}$ w pobliżu $x_0 = 0$.

Różniczka - przykład 2

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $\operatorname{arcctg}(-0,02)$.

Obliczamy przybliżoną wartość funkcji $f(x) = \operatorname{arcctg}$ w pobliżu $x_0 = 0$. Zatem musimy obliczyć $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, czyli $f'(0) = -1$.

Różniczka - przykład 2

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $\operatorname{arcctg}(-0,02)$.

Obliczamy przybliżoną wartość funkcji $f(x) = \operatorname{arcctg}$ w pobliżu $x_0 = 0$. Zatem musimy obliczyć $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, czyli $f'(0) = -1$. Stąd:

$$f(-0,02) \approx f(0) + df_0(-0,02 - 0) =$$

Różniczka - przykład 2

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $\operatorname{arcctg}(-0,02)$.

Obliczamy przybliżoną wartość funkcji $f(x) = \operatorname{arcctg}$ w pobliżu $x_0 = 0$. Zatem musimy obliczyć $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, czyli $f'(0) = -1$. Stąd:

$$f(-0,02) \approx f(0) + df_0(-0,02 - 0) = \frac{\pi}{2} - 1 \cdot (-0,02) \approx$$

Różniczka - przykład 2

Twierdzenie o różniczce

Jeśli f jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to dla x w małym otoczeniu punktu x_0 zachodzi przybliżony wzór:

$$f(x) \approx f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zadanie

Za pomocą różniczki obliczyć przybliżoną wartość $\operatorname{arcctg}(-0,02)$.

Obliczamy przybliżoną wartość funkcji $f(x) = \operatorname{arcctg}$ w pobliżu $x_0 = 0$. Zatem musimy obliczyć $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, czyli $f'(0) = -1$. Stąd:

$$f(-0,02) \approx f(0) + df_0(-0,02 - 0) = \frac{\pi}{2} - 1 \cdot (-0,02) \approx 1,59.$$

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

Oznaczmy ten czas przez $t(r)$. Rozwiązując to w sposób dokładny, potrzebujemy rozwiązać równanie $2 = (1 + r)^{t(r)}$,

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

Oznaczmy ten czas przez $t(r)$. Rozwiązując to w sposób dokładny, potrzebujemy rozwiązać równanie $2 = (1 + r)^{t(r)}$, skąd otrzymujemy $t(r) = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}$.

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

Oznaczmy ten czas przez $t(r)$. Rozwiązując to w sposób dokładny, potrzebujemy rozwiązać równanie $2 = (1 + r)^{t(r)}$, skąd otrzymujemy $t(r) = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}$. Nie jest to wynik, który łatwo oszacować w pamięci dla konkretnego r.

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

Oznaczmy ten czas przez $t(r)$. Rozwiązując to w sposób dokładny, potrzebujemy rozwiązać równanie $2 = (1 + r)^{t(r)}$, skąd otrzymujemy $t(r) = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}$. Nie jest to wynik, który łatwo oszacować w pamięci dla konkretnego r. Dlatego, by szybko podać wynik, użyjemy różniczki.

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

Rozważmy funkcję $\varphi(r) = \frac{1}{t(r)} = \frac{\ln(1+r)}{\ln 2}$.

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0,1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

Rozważmy funkcję $\varphi(r) = \frac{1}{t(r)} = \frac{\ln(1+r)}{\ln 2}$. Obliczamy $\varphi'(r) = \frac{1}{(1+r)\ln 2}$.

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0,1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

Rozważmy funkcję $\varphi(r) = \frac{1}{t(r)} = \frac{\ln(1+r)}{\ln 2}$. Obliczamy $\varphi'(r) = \frac{1}{(1+r)\ln 2}$. Stąd $\varphi'(0) = \frac{1}{\ln 2}$

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

Rozważmy funkcję $\varphi(r) = \frac{1}{t(r)} = \frac{\ln(1+r)}{\ln 2}$. Obliczamy $\varphi'(r) = \frac{1}{(1+r)\ln 2}$. Stąd $\varphi'(0) = \frac{1}{\ln 2}$ i, jako że $r \approx 0$ (stopy procentowe zazwyczaj nie są duże), to zgodnie z twierdzeniem o różniczce w punkcie 0:

$$\varphi(r) \approx \varphi(0) + \varphi'(0)(r - 0) = 0 + \frac{1}{\ln 2} r.$$

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

Rozważmy funkcję $\varphi(r) = \frac{1}{t(r)} = \frac{\ln(1+r)}{\ln 2}$. Obliczamy $\varphi'(r) = \frac{1}{(1+r)\ln 2}$. Stąd $\varphi'(0) = \frac{1}{\ln 2}$ i, jako że $r \approx 0$ (stopy procentowe zazwyczaj nie są duże), to zgodnie z twierdzeniem o różniczce w punkcie 0:

$$\varphi(r) \approx \varphi(0) + \varphi'(0)(r-0) = 0 + \frac{1}{\ln 2} r.$$

Stąd $t(r) = \frac{1}{\varphi(r)} \approx \frac{\ln 2}{r} \approx \frac{0{,}7}{r} = \frac{70}{100r}$.

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

$t(r) \approx \frac{70}{100r}$.
Ponieważ $100r$ to oprocentowanie lokaty podane w procentach, mamy prostą regułę szacowania czasu podwojenia kapitału w inwestycji znaną jako *reguła* 70:

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

$t(r) \approx \frac{70}{100r}$.
Ponieważ $100r$ to oprocentowanie lokaty podane w procentach, mamy prostą regułę szacowania czasu podwojenia kapitału w inwestycji znaną jako *reguła* 70: inwestycja dająca zwrot $R\%$ rocznie podwoi zainwestowany kapitał po około $\frac{70}{R}$ latach.

Reguła 70

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0, 1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

$t(r) \approx \frac{70}{100r}$.
Ponieważ $100r$ to oprocentowanie lokaty podane w procentach, mamy prostą regułę szacowania czasu podwojenia kapitału w inwestycji znaną jako *reguła* 70: inwestycja dająca zwrot $R\%$ rocznie podwoi zainwestowany kapitał po około $\frac{70}{R}$ latach. Np. inwestycja na 2% rocznie da nam podwojenie kapitału po 35 latach, a na 5% - po 14 latach.

Zadanie - reguła 70

Kapitał K złożono w banku zapewniającym oprocentowanie $r \in [0,1]$ (najczęściej wyrażane w procentach, tutaj liczbowo, jako ułamek) w skali roku. Jak można szybko oszacować, ile czasu potrzeba, by kapitał się podwoił?

$t(r) \approx \frac{70}{100r}$.
Ponieważ $100r$ to oprocentowanie lokaty podane w procentach, mamy prostą regułę szacowania czasu podwojenia kapitału w inwestycji znaną jako *reguła* 70: inwestycja dająca zwrot $R\%$ rocznie podwoi zainwestowany kapitał po około $\frac{70}{R}$ latach. Np. inwestycja na 2% rocznie da nam podwojenie kapitału po 35 latach, a na 5% - po 14 latach.
Oczywiście, jest to dobre oszacowanie tylko dla małych R. Np. przy $R \approx 10$ bezpieczniej stosować analogiczną *regułę* 72.

Model całkowitego dochodu narodowego

Uproszczony model Keynesa - gospodarka zamknięta

Niech Y będzie dochodem narodowym. Konsumpcja zależy od dochodu narodowego i jest dana funkcją $C(Y)$. Dochód narodowy jest rozdzielony na konsumpcję, inwestycje (I) i wydatki rządowe (G):

$$Y = C(Y) + I + G.$$

Jak zmiana wielkości inwestycji wpłynie na zmianę Y? (to nie takie proste, bo razem z Y zmienia się $C(Y)$!).

Model całkowitego dochodu narodowego

Uproszczony model Keynesa - gospodarka zamknięta

Niech Y będzie dochodem narodowym. Konsumpcja zależy od dochodu narodowego i jest dana funkcją $C(Y)$. Dochód narodowy jest rozdzielony na konsumpcję, inwestycje (I) i wydatki rządowe (G):

$$Y = C(Y) + I + G.$$

Jak zmiana wielkości inwestycji wpłynie na zmianę Y? (to nie takie proste, bo razem z Y zmienia się $C(Y)$!).

Załóżmy, że znamy obecny dochód $\overline{Y}$ i obecną konsumpcję $\overline{C} = C(\overline{Y})$.

Model całkowitego dochodu narodowego

Uproszczony model Keynesa - gospodarka zamknięta

Niech Y będzie dochodem narodowym. Konsumpcja zależy od dochodu narodowego i jest dana funkcją $C(Y)$. Dochód narodowy jest rozdzielony na konsumpcję, inwestycje (I) i wydatki rządowe (G):

$$Y = C(Y) + I + G.$$

Jak zmiana wielkości inwestycji wpłynie na zmianę Y? (to nie takie proste, bo razem z Y zmienia się $C(Y)$!).

Załóżmy, że znamy obecny dochód $\overline{Y}$ i obecną konsumpcję $\overline{C} = C(\overline{Y})$. Przybliżymy funkcję $C(Y)$ jej linearyzacją (czyli przybliżeniem przez równanie prostej stycznej do jej wykresu w $(\overline{Y}, \overline{C})$).

Model całkowitego dochodu narodowego

Uproszczony model Keynesa - gospodarka zamknięta

Niech Y będzie dochodem narodowym. Konsumpcja zależy od dochodu narodowego i jest dana funkcją $C(Y)$. Dochód narodowy jest rozdzielony na konsumpcję, inwestycje (I) i wydatki rządowe (G):

$$Y = C(Y) + I + G.$$

Jak zmiana wielkości inwestycji wpłynie na zmianę Y? (to nie takie proste, bo razem z Y zmienia się $C(Y)$!).

Załóżmy, że znamy obecny dochód $\overline{Y}$ i obecną konsumpcję $\overline{C} = C(\overline{Y})$. Przybliżymy funkcję $C(Y)$ jej linearyzacją (czyli przybliżeniem przez równanie prostej stycznej do jej wykresu w $(\overline{Y}, \overline{C})$).

Model całkowitego dochodu narodowego

Uproszczony model Keynesa - gospodarka zamknięta

$$Y = C(Y) + I + G.$$

Jak zmiana wielkości inwestycji wpłynie na zmianę Y?

Model całkowitego dochodu narodowego

Uproszczony model Keynesa - gospodarka zamknięta

$$Y = C(Y) + I + G.$$

Jak zmiana wielkości inwestycji wpłynie na zmianę Y?

Niech $C'(\overline{Y}) = m$.

Model całkowitego dochodu narodowego

Uproszczony model Keynesa - gospodarka zamknięta

$$Y = C(Y) + I + G.$$

Jak zmiana wielkości inwestycji wpłynie na zmianę Y?

Niech $C'(\overline{Y}) = m$. m w ekonomii nazywa się *krańcową skłonnością do konsumpcji* (czyli odpowiedzią na pytanie - jaką część dodatkowej jednostki dochodu obywatele przeznaczyliby na konsumpcję).

Model całkowitego dochodu narodowego

Uproszczony model Keynesa - gospodarka zamknięta

$$Y = C(Y) + I + G.$$

Jak zmiana wielkości inwestycji wpłynie na zmianę Y?

Niech $C'(\overline{Y}) = m$. m w ekonomii nazywa się *krańcową skłonnością do konsumpcji* (czyli odpowiedzią na pytanie - jaką część dodatkowej jednostki dochodu obywatele przeznaczyliby na konsumpcję).
Łatwo obliczamy, że w pobliżu $\overline{Y}$, $C(Y) \approx mY + c$, gdzie $c = \overline{C} - m\overline{Y}$.

Model całkowitego dochodu narodowego

Uproszczony model Keynesa - gospodarka zamknięta

$$Y = C(Y) + I + G.$$

Jak zmiana wielkości inwestycji wpłynie na zmianę Y?

Niech $C'(\overline{Y}) = m$. m w ekonomii nazywa się *krańcową skłonnością do konsumpcji* (czyli odpowiedzią na pytanie - jaką część dodatkowej jednostki dochodu obywatele przeznaczyliby na konsumpcję).
Łatwo obliczamy, że w pobliżu $\overline{Y}$, $C(Y) \approx mY + c$, gdzie $c = \overline{C} - m\overline{Y}$.
Wstawiając to do wyjściowego równania dostajemy:
$Y \approx mY + c + I + G$,

Model całkowitego dochodu narodowego

Uproszczony model Keynesa - gospodarka zamknięta

$$Y = C(Y) + I + G.$$

Jak zmiana wielkości inwestycji wpłynie na zmianę Y?

Niech $C'(\overline{Y}) = m$. m w ekonomii nazywa się *krańcową skłonnością do konsumpcji* (czyli odpowiedzią na pytanie - jaką część dodatkowej jednostki dochodu obywatele przeznaczyliby na konsumpcję).
Łatwo obliczamy, że w pobliżu $\overline{Y}$, $C(Y) \approx mY + c$, gdzie $c = \overline{C} - m\overline{Y}$.
Wstawiając to do wyjściowego równania dostajemy:
$Y \approx mY + c + I + G$, a stąd $Y \approx \frac{c+I+G}{1-m}$. (o ile $0 < m < 1$, co zwykle w takich modelach się zakłada).

Model całkowitego dochodu narodowego

Uproszczony model Keynesa - gospodarka zamknięta

$$Y = C(Y) + I + G.$$

Jak zmiana wielkości inwestycji wpłynie na zmianę Y?

Niech $C'(\overline{Y}) = m$. m w ekonomii nazywa się *krańcową skłonnością do konsumpcji* (czyli odpowiedzią na pytanie - jaką część dodatkowej jednostki dochodu obywatele przeznaczyliby na konsumpcję).
Łatwo obliczamy, że w pobliżu $\overline{Y}$, $C(Y) \approx mY + c$, gdzie $c = \overline{C} - m\overline{Y}$.
Wstawiając to do wyjściowego równania dostajemy:
$Y \approx mY + c + I + G$, a stąd $Y \approx \frac{c+I+G}{1-m}$. (o ile $0 < m < 1$, co zwykle w takich modelach się zakłada).
Stąd otrzymujemy zależność wzrostu Y od wzrostu I: $Y'(I) \approx \frac{1}{1-m}$.

Uzupełnienie - krańcowa skłonność do konsumpcji

Warto jeszcze uzasadnić, czemu na poprzednim slajdzie założyliśmy o krańcowej skłonności do konsumpcji, że $0 < m < 1$.

Uzupełnienie - krańcowa skłonność do konsumpcji

Warto jeszcze uzasadnić, czemu na poprzednim slajdzie założyliśmy o krańcowej skłonności do konsumpcji, że $0 < m < 1$.
Możemy zapisać, że $Y = C(Y) + S(Y)$ - gdzie $S(Y)$ - nieskonsumowana część dochodu - symbolizuje oszczędności.

Uzupełnienie - krańcowa skłonność do konsumpcji

Warto jeszcze uzasadnić, czemu na poprzednim slajdzie założyliśmy o krańcowej skłonności do konsumpcji, że $0 < m < 1$.
Możemy zapisać, że $Y = C(Y) + S(Y)$ - gdzie $S(Y)$ - nieskonsumowana część dochodu - symbolizuje oszczędności. Wraz ze wzrostem dochodu zarówno konsumpcja, jak i oszczędności rosną, więc możemy założyć $S'(Y) > 0$ i $C'(Y) > 0$.

Uzupełnienie - krańcowa skłonność do konsumpcji

Warto jeszcze uzasadnić, czemu na poprzednim slajdzie założyliśmy o krańcowej skłonności do konsumpcji, że $0 < m < 1$.
Możemy zapisać, że $Y = C(Y) + S(Y)$ - gdzie $S(Y)$ - nieskonsumowana część dochodu - symbolizuje oszczędności. Wraz ze wzrostem dochodu zarówno konsumpcja, jak i oszczędności rosną, więc możemy założyć $S'(Y) > 0$ i $C'(Y) > 0$.
Ale różniczkując stronami (po Y) równanie $Y = C(Y) + S(Y)$ dostajemy, że $1 = C'(Y) + S'(Y)$, więc $0 < C'(Y) < 1$ dla każdego Y.

Uzupełnienie - krańcowa skłonność do konsumpcji

Warto jeszcze uzasadnić, czemu na poprzednim slajdzie założyliśmy o krańcowej skłonności do konsumpcji, że $0 < m < 1$.
Możemy zapisać, że $Y = C(Y) + S(Y)$ - gdzie $S(Y)$ - nieskonsumowana część dochodu - symbolizuje oszczędności. Wraz ze wzrostem dochodu zarówno konsumpcja, jak i oszczędności rosną, więc możemy założyć $S'(Y) > 0$ i $C'(Y) > 0$.
Ale różniczkując stronami (po Y) równanie $Y = C(Y) + S(Y)$ dostajemy, że $1 = C'(Y) + S'(Y)$, więc $0 < C'(Y) < 1$ dla każdego Y.
Jednocześnie $C'(\overline{Y}) = m$, więc $0 < m < 1$.