

7 II 2021

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut+dodatkowe 15 minut na wysłanie zadań na platformę moodle. Zадania przesłane po terminie bez zgłoszenia problemów technicznych będą miały obniżoną ocenę. Przekroczenie czasu o ponad pół godziny spowoduje uniemożliwienie oddania zadania.
2. Formą przeprowadzania egzaminu jest odpowiednie zadanie w platformie moodle, warunkiem zaliczenia jest przesłanie rozwiązań zadań w czytelnej postaci w ramach tego zadania.
3. W każdym pliku z rozwiązaniami powinien znaleźć się podpis: imię i nazwisko. Nazwy plików powinny być odnosić się do numerów zadań, które w danym pliku są rozwiązywane.
4. Dopuszczalne formaty wysyłanych plików to: pdf, doc, docx, png, jpg, jpeg, bmp. Przed wylogowaniem z egzaminu należy się upewnić, że pliki są w postaci czytelnej, w wypadkach problemów, skonsultować się z osobą prowadzącą egzamin.
5. Przed wysłaniem proszę się upewnić, że zaznaczyli Państwo oświadczenie o pracy samodzielnej i potwierdzenie, że to jest ostateczna wersja.
6. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.

Zadania:

1. (400 punktów) W państwie Dyskretika znajdują się 3 kurorty narciarskie: Grafice, Rekurencjowo i Eresa.
 - a) Pewien narciarz postanowił, że w ciągu kolejnych 15 zimowych weekendów 8 razy pojedzie do Eresy, 3 razy do Grafic i 4 razy do Rekurencjowa. Na ile sposobów może ustalić kolejność tych wyjazdów?
 - b) Trasy zjazdowe w Graficach znajdują się na zboczach 3 wzgórz: Hamiltonówki, Chromatycznego Wierchu i Dwudzielnicy. Na każdym z tych wzgórz znajduje się jedna trasa treningowa i 9 tras zwykłych. Aby zdobyć odznakę „Zdobywcy Grafic” narciarz musi zjechać po raz każdą trasą treningową, notując kolejność w jakiej nimi zjeżdżał. Następnie musi zjechać siedmioma różnymi zwykłymi trasami ze wzgórz, na którym zaliczył swoją pierwszą trasę treningową, pięcioma różnymi zwykłymi trasami ze wzgórz, na którym zaliczył swoją drugą trasę treningową i trzema różnymi zwykłymi trasami ze wzgórz, na którym trasę treningową zaliczył jako trzecią. Na ile różnych sposobów można wykonać to zadanie, jeśli założymy, że kolejność zjazdów zwykłymi trasami nie ma znaczenia?
 - c) Pewien turysta chciał w tym regionie kupić 23 pocztówki i wysłać je do znajomych. Na poczcie, gdzie dokonywał zakupu, mógł wybrać spośród 6 typów pocztówek, które przedstawiały odpowiednio rynki Grafic, Rekurencjowa i Eresy oraz trzy najwyższe wzgórza w okolicy tych kurortów (pocztówki przedstawiające ten sam widok były identyczne). Zakładając, że chciał kupić przynajmniej po 2 pocztówki każdego typu, na ile sposobów mógł dokonać zakupu?
 - d) Przeprowadzono ankietę wśród 200 narciarzy, którzy przebywali w tych kurortach, na temat ich zimowych wyjazdów. Okazało się, że w tym roku 127 z nich odwiedziło Eresę, 110 było w Graficach, a 140 w Rekurencjowie. Do tego, 59 było zarówno w Eresie, jak i Graficach, 73 w Graficach i Rekurencjowie, a 87 w Eresie i Rekurencjowie. Ilu z nich wybrało się do wszystkich trzech miejscowości?
2. (400 punktów) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:
 $s_n = s_{n-1} + 6s_{n-2} - 5 \cdot 3^n$ z warunkami początkowymi $s_0 = 6, s_1 = -11$.

3. (400 punktów) a) Rozwiązać poniższy układ kongruencji:

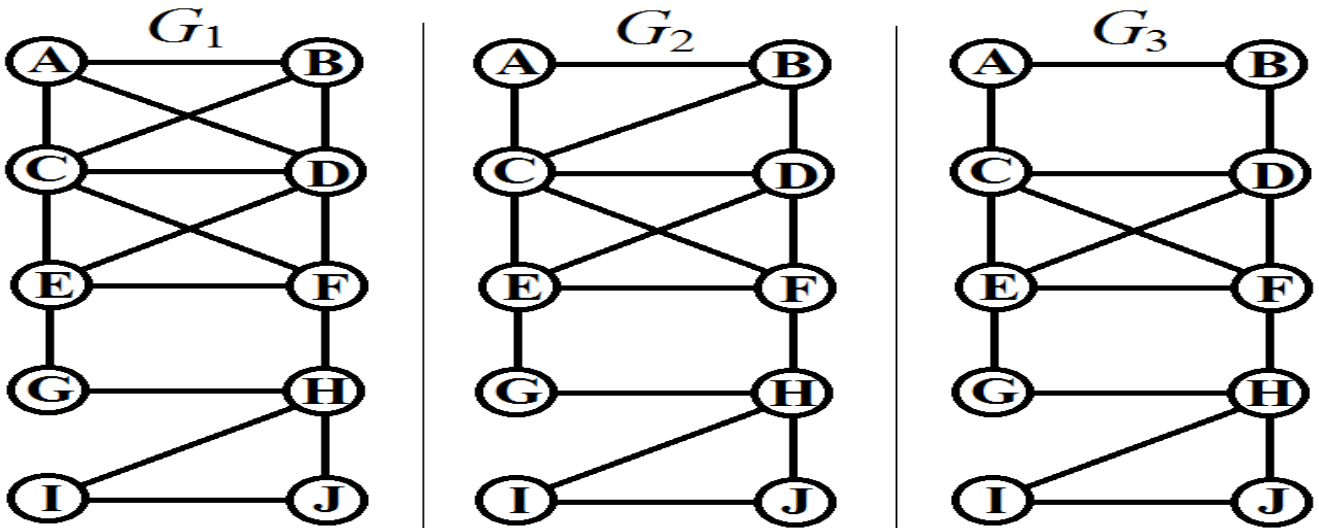
$$\begin{cases} 11x + 8y \equiv_{29} 2 \\ 7x + 3y \equiv_{29} \varphi(45) \end{cases}$$

b) Czy istnieją liczby całkowite a i b takie, że: $2040a + 5049b = 153$? Jeśli tak, podać te liczby. Przedstawić (za pomocą odpowiedniej tabelki) pełne rozumowanie prowadzące do odpowiedzi.

4. (400 punktów)

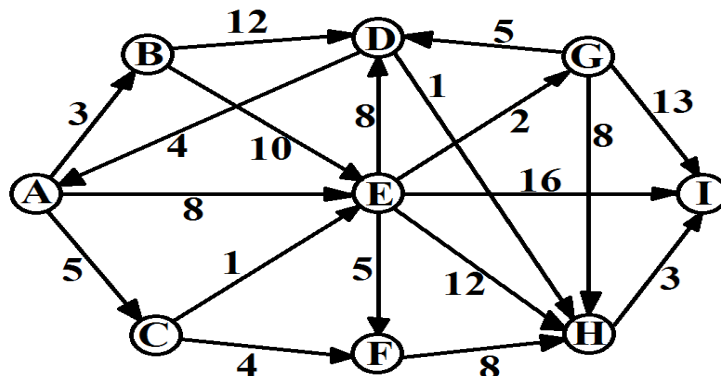
a) Dla każdego z poniższych grafów (G_1, G_2, G_3) sprawdzić, czy występuje w nim cykl lub droga Eulera. Odpowiedź uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenie. Jeśli dla któregoś z grafów będzie istnieć droga Eulera, ale nie cykl Eulera, wykorzystać algorytm Fleury'ego do znalezienia jednej z tych dróg zapisując przebieg algorytmu w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisz odpowiedź w postaci ciągu kolejnych odwiedzanych wierzchołków na tej drodze.

Nr etapu	Wybrany wierzchołek	Alternatywy
----------	---------------------	-------------



b) Zastosować algorytm Dijkstry ze wskaźnikami do wyznaczenia drogi o najmniejszej wadze pomiędzy wierzchołkami A i I poniższego grafu. Przebieg algorytmu zapisać w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać tę drogę i jej wagę.

Nr etapu	Zbiór L	$d(B)p(B)$	$d(C)p(C)$...	$d(I)p(I)$
----------	---------	------------	------------	-----	------------



5. (400 punktów) a) Narysować grafy spójne, proste o co najmniej 6 wierzchołkach i 6 krawędziach spełniające dane warunki lub uzasadnić, że takie grafy nie istnieją:

I. Drzewo, które jest grafem hamiltonowskim.

II. Graf eulerowski o maksymalnym stopniu wierzchołka 2 i indeksie chromatycznym 3.

III. Graf dwudzielny, który nie jest drzewem

IV. Graf, który jest eulerowski, ale nie hamiltonowski.

V. Graf, który jest hamiltonowski, ale nie eulerowski.

b) Jakie warunki musi spełniać para (n, e) , by mogła tworzyć klucz publiczny w algorytmie szyfrowania RSA? Które z następujących par spełniają te warunki (odpowiedź uzasadnić): $(91, 5)$, $(98, 13)$, $(77, 25)$.