Egzamin z matematyki dyskretnej, informatyka stosowana, studia magisterskie, rok 1, termin 2

---

7 III 2021

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut+dodatkowe 15 minut na wysłanie zadań na platformę moodle. Zadania przesłane po terminie bez zgłoszenia problemów technicznych będą miały obniżoną ocenę. Przekroczenie czasu o ponad pół godziny spowoduje uniemożliwienie oddania zadania.

2. Formą przeprowadzania egzaminu jest odpowiednie zadanie w platformie moodle, warunkiem zaliczenia jest przesłanie rozwiązań zadań w czytelnej postaci w ramach tego zadania.

3. W każdym pliku z rozwiązaniami powinien znaleźć się podpis: imię i nazwisko. Nazwy plików powinny być odnosić się do numerów zadań, które w danym pliku są rozwiązywane.

4. Dopuszczalne formaty wysyłanych plików to: pdf, doc, docx, png, jpg, jpeg, bmp. Przed wylogowaniem z egzaminu należy się upewnić, że pliki są w postaci czytelnej, w wypadkach problemów, skonsultować się z osobą prowadzącą egzamin.

5. Przed wysłaniem proszę się upewnić, że zaznaczyli Państwo oświadczenie o pracy samodzielnej i potwierdzenie, że to jest ostateczna wersja.

6. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.

Zadania:

1. (400 punktów) Korporacja DYS-KRET używa 6500 komputerów.

a) Zarząd korporacji postanowił przydzielić wszystkie te komputery do 12 różnych zadań. Na ile sposobów mógł rozdzielić komputery do zadań, jeśli każde zadanie musi wykonywać co najmniej 100 komputerów i istotna jest jedynie liczba komputerów przydzielona do zadania, a nie który konkretnie komputer do danego zadania jest przydzielony (tj. komputery w tym podpunkcie są nierozróżnialne)?

Komputerom naklejono 4-cyfrowe numery: od 2001 do 8500 i od tej pory traktujemy je zawsze jako rozróżnialne.

b) Do kontroli legalności oprogramowania wylosowano 500 komputerów, z tego dokładnie 100 z numerami nie większymi od 3000 i nie więcej niż 3 z numerami wyższymi niż 8000. Na ile sposobów można było wybrać zestaw komputerów spełniający te wymogi?

c) Wirus Euklides zaatakował komputery, których numery były podzielne przez 12, 63 lub 70. Ile komputerów korporacji zostało „zarażonych”?

d) 700 komputerów przydzielono do działu reklamy, 1500 do działu zarządzania zasobami, a 2500 do działu księgowości. Na ile sposobów można było to uczynić?

2. (400 punktów) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:

$$s_{n+1} = 8s_n - 16s_{n-1} + (n-3) \cdot 3^n; s_0 = 4, s_1 = 13.$$

3. a) (200 punktów) W algorytmie RSA kluczem publicznym jest para $(85, 13)$. Obliczyć klucz prywatny używany do dekodowania informacji oraz obliczyć, jakiej jednostce tekstu jawnego odpowiada w szyfrogramie jednostka o numerze 10.

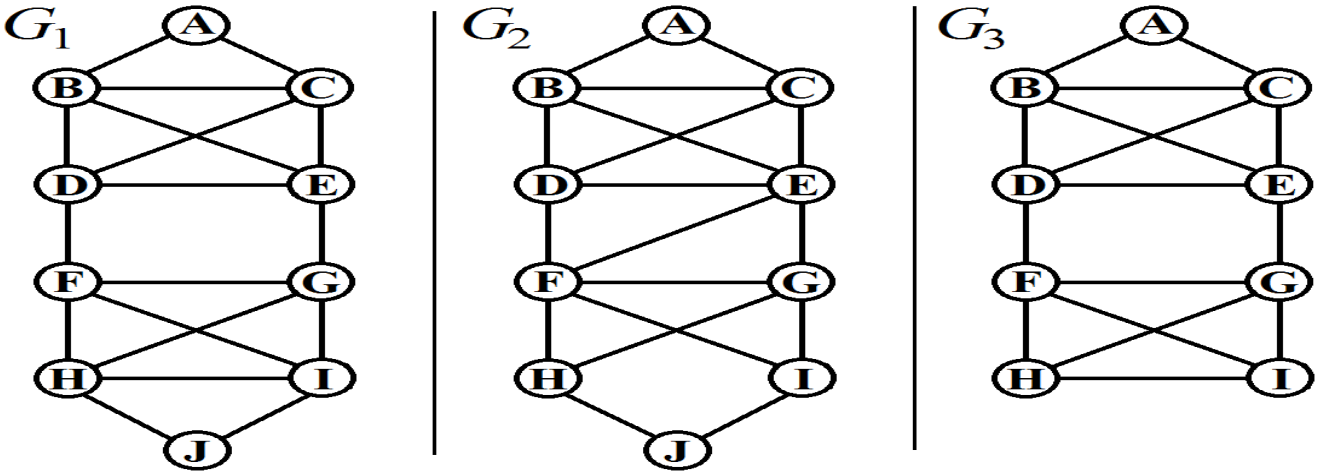
b) (100 punktów) Obliczyć wartość $\varphi(22000)$.

c) (100 punktów) Obliczyć resztę z dzielenia liczby 25^{200} przez 357.

4. (400 punktów)

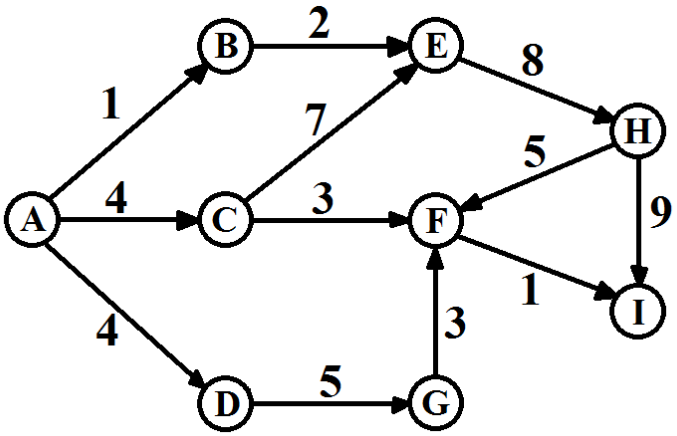
a) Rozstrzygnąć, czy w grafie G_1 istnieje cykl Hamiltona i zapisać go, jeśli istnieje. Dla każdego z poniższych grafów (G_1, G_2, G_3) sprawdzić, czy występuje w nim cykl lub droga Eulera. Odpowiedź uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenie. Jeśli dla któregoś z grafów będzie istnieć droga Eulera, ale nie cykl Eulera, wykorzystać algorytm Fleury'ego do znalezienia jednej z tych dróg zapisując przebieg algorytmu w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać odpowiedź w postaci ciągu kolejnych odwiedzanych wierzchołków na tej drodze.

Nr etapu	Wybrany wierzchołek	Alternatywy



b) Za pomocą algorytmu Edmondsa-Karpa znaleźć maksymalny przepływ od źródła A do ujścia I w poniższym grafie skierowanym. Podać wartość tego przepływu. Uzupełnić odpowiednią tabelę przebiegu algorytmu.

Nr etapu	Ścieżka powiększająca	Przepływ wzdłuż ścieżki	Alternatywne ścieżki powiększające



5. (400 punktów) a) Podać definicję indeksu oraz liczby chromatycznej. Wskazać (narysować lub podać nazwę) spójne grafy proste o co najmniej 5 wierzchołkach i 5 krawędziach, spełniające poniższe warunki, lub uzasadnić, że takie grafy nie istnieją:

I. Graf, którego indeks chromatyczny jest 3 razy większy od liczby chromatycznej.

II. Drzewo o liczbie chromatycznej większej od indeksu chromatycznego.

III. Drzewo o liczbie chromatycznej równej indeksowi chromatycznemu.

IV. Graf, który nie jest cyklem, dla którego zarówno liczba chromatyczna jak i indeks chromatyczny są większe od maksymalnego stopnia wierzchołka.

V. Graf o liczbie chromatycznej 3 i indeksie chromatycznym 4.

b) Podać twierdzenie o istnieniu rozwiązań kongruencji liniowej. Podać przykłady przykłady (lub uzasadnić, dlaczego jest to niemożliwe) kongruencji liniowych o podstawie $n = 14$ i niezerowym współczynniku przy niewiadomej takich, że:

I. Kongruencja nie ma rozwiązań.

II. Kongruencja ma dokładnie jedno rozwiązanie.

III. Kongruencja ma dokładnie 2 rozwiązania.

IV. Kongruencja ma dokładnie 5 rozwiązań.

V. Kongruencja ma nieskończenie wiele rozwiązań.