

1 II 2021

---

**Informacje dla zdających:**

1. Egzamin trwa 90 minut+dodatkowe 15 minut na wysłanie zadań na platformę moodle. Zadania przesłane po terminie bez zgłoszenia problemów technicznych będą miały obniżoną ocenę. Przekroczenie czasu o ponad pół godziny spowoduje uniemożliwienie oddania zadania.
  2. Formą przeprowadzania egzaminu jest odpowiednie zadanie w platformie moodle, warunkiem zaliczenia jest przesłanie rozwiązań zadań w czytelnej postaci w ramach tego zadania.
  3. W każdym pliku z rozwiązaniami powinien znaleźć się podpis: imię i nazwisko. Nazwy plików powinny być odnosić się do numerów zadań, które w danym pliku są rozwiązywane.
  4. Dopuszczalne formaty wysyłanych plików to: pdf, doc, docx, png, jpg, jpeg, bmp. Przed wylogowaniem z egzaminu należy się upewnić, że pliki są w postaci czytelnej, w wypadkach problemów, skonsultować się z osobą prowadzącą egzamin.
  5. Przed wysłaniem proszę się upewnić, że zaznaczyli Państwo oświadczenie o pracy samodzielnej i potwierdzenie, że to jest ostateczna wersja.
  6. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.
- 

**Zadania:**

1. (400 punktów) Sklep „Towary dyskretne” sprzedaje wyłącznie wihajstry, ustrojstwa i dynksy.
  - a) Załóżmy, że dowolne dwa wihajstry są między sobą nierozróżnialne i to samo dotyczy ustrojstw i dynksów. Klient chce kupić 25 różnych przedmiotów, z tego co najmniej 3 ustrojstwa oraz co najmniej po jednym wihajstrze i dynksie. Ile jest możliwych różnych koszyków tych dóbr spełniających wymagania klienta (przez koszyk rozumiemy trójkę liczb  $(w, u, d)$ , gdzie  $w$  jest liczbą wihajstrów,  $u$  - liczbą ustrojstw, a  $d$  - liczbą dynksów, które klient dostanie)?
  - b) Podtrzymując założenie o nierozróżnialności towarów wewnątrz swoich grup, rozważmy klienta, który zakupił 9 wihajstrów, 5 ustrojstw i 4 dynksy. Ile różnych pociągów może z nich zbudować dziecko klienta, jeśli przez „pociąg” rozumiemy ustawienie wszystkich tych przedmiotów w jednym rzędzie?
  - c) Dla odmiany załóżmy, że w sklepie można było kupić 10 różnych wihajstrów, 13 różnych ustrojstw i 18 różnych dynksów. Klient chce kupić 11 różnych przedmiotów, z tego dokładnie 4 wihajstry i co najwyżej 3 dynksy. Na ile sposobów może to uczynić?
  - d) W ostatnim tygodniu w sklepie zrobiło zakupy 120 klientów, z czego 109 kupowało wihajstry, 67 kupiło ustrojstwa, a 86 - dynksy. Spośród nich, 63 kupiło zarówno wihajstry, jak i ustrojstwa, 76 kupiło wihajstry i dynksy, a 37 - ustrojstwa i dynksy. Ilu z nich kupiło wszystkie rodzaje towarów dostępnych w sklepie?
2. (400 punktów) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:

$$s_n = 4s_{n-1} + 21s_{n-2} + 20 \cdot (-3)^n, \quad s_0 = 5, \quad s_1 = 7.$$

3. (400 punktów) a) Rozwiązać poniższy układ kongruencji:

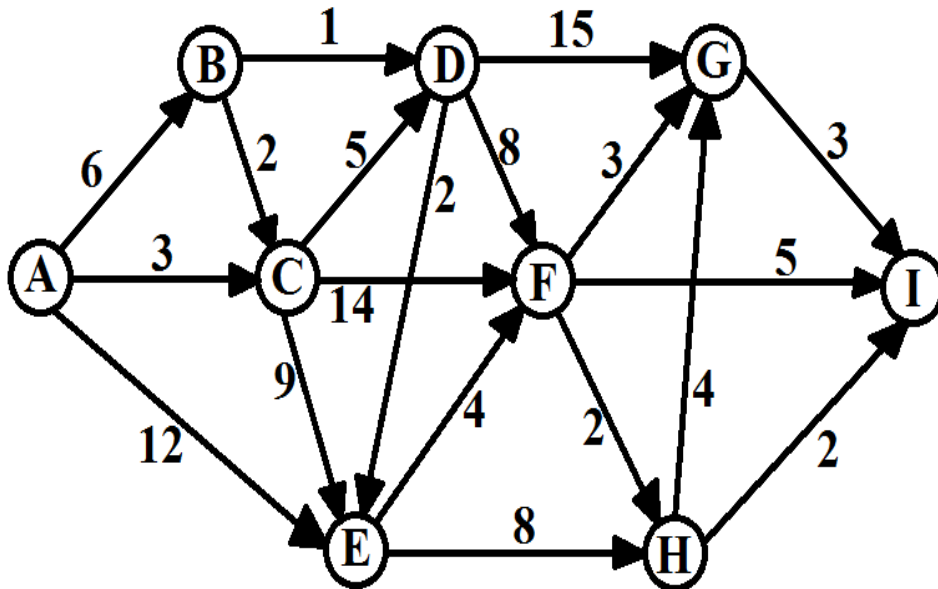
$$\begin{cases} 4x - 7y \equiv_{23} 19 \\ x + 8y \equiv_{23} 18 \end{cases}$$

- b) W algorytmie RSA kluczem publicznym jest para  $(95, 31)$ . Obliczyć klucz prywatny używany do dekodowania informacji i podać, w jaki sposób zakodowana będzie jednostka tekstu, której w tekście jawnym przypisano numer 4 (tj. podać numer jednostki, w którą jednostka 4 zmienia się w szyfrogramie).

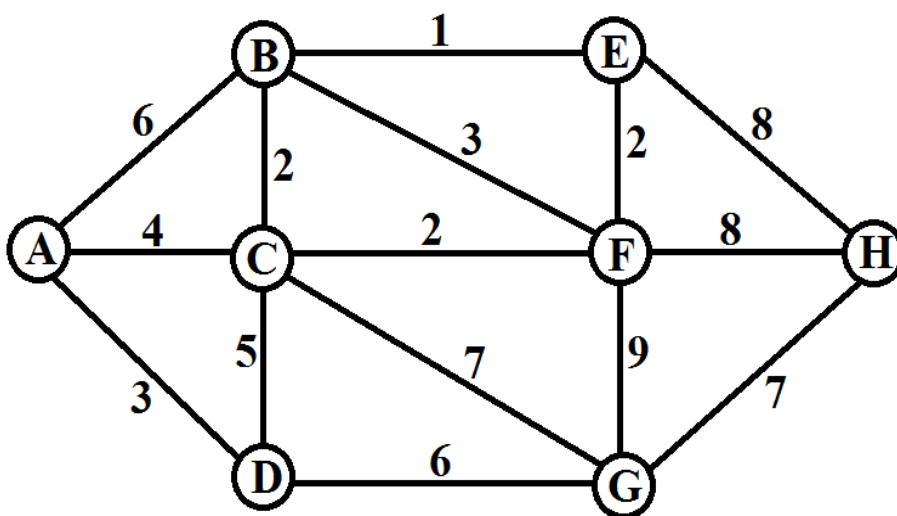
4. (400 punktów)

- a) Zastosować algorytm Dijkstry ze wskaźnikami do wyznaczenia drogi o najmniejszej wadze pomiędzy wierzchołkami  $A$  i  $I$  poniższego grafu. Przebieg algorytmu zapisać w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać tę drogę i jej wagę.

Nr etapu	Zbiór $L$	$d(B)p(B)$	$d(C)p(C)$	...	$d(I)p(I)$
----------	-----------	------------	------------	-----	------------



- b) Znaleźć minimalne drzewo spinające dla poniższego grafu za pomocą algorytmu Kruskala oraz za pomocą algorytmu Prima. Przebieg każdego algorytmu zapisać w odpowiadającej mu tabeli. Jeśli algorytm trzeba rozpocząć od jakiegoś wierzchołka, rozpocząć należy od  $A$ . Jeśli algorytm wymaga uszeregowania krawędzi, wypisać to uszeregowanie. Podpisać każdy z algorytmów oraz podać wagę każdego z uzyskanych minimalnych drzew spinających.



Poniżej forma tabeli dla odpowiednich algorytmów. W trzeciej kolumnie dla każdego algorytmu wybrać jedną ze wskazanych opcji.

Nr etapu	Wybrana krawędź	Krawędzie odrzucone przed wyborem/Alternatywy
----------	-----------------	---

5. (400 punktów) a) Narysować grafy spójne, proste o co najmniej 6 wierzchołkach i 6 krawędziach spełniające dane warunki lub uzasadnić, że takie grafy nie istnieją:

I. Graf o liczbie chromatycznej 3, który jest eulerowski i hamiltonowski.

II. Graf eulerowski, który jest drzewem.

III. Graf dwudzielny o indeksie chromatycznym 3, który jest hamiltonowski.

IV. Graf dwudzielny o indeksie chromatycznym 3, który nie jest hamiltonowski.

V. Drzewo, które nie jest grafem dwudzielnym.

b) Podać twierdzenie o istnieniu rozwiązań kongruencji liniowej. Podać przykłady przykłady (lub uzasadnić, dlaczego jest to niemożliwe) kongruencji liniowych o podstawie  $n = 12$  i niezerowym współczynniku przy niewiadomej takich, że:

I. Kongruencja nie ma rozwiązań.

II. Kongruencja ma dokładnie jedno rozwiązanie.

III. Kongruencja ma dokładnie 2 rozwiązania.

IV. Kongruencja ma dokładnie 5 rozwiązań.

V. Kongruencja ma nieskończenie wiele rozwiązań.