

1 III 2021

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut+dodatkowe 15 minut na wysłanie zadań na platformę moodle. Zadania przesłane po terminie bez zgłoszenia problemów technicznych będą miały obniżoną ocenę. Przekroczenie czasu o ponad pół godziny spowoduje uniemożliwienie oddania zadania.
2. Formą przeprowadzania egzaminu jest odpowiednie zadanie w platformie moodle, warunkiem zaliczenia jest przesłanie rozwiązań zadań w czytelnej postaci w ramach tego zadania.
3. W każdym pliku z rozwiązaniami powinien znaleźć się podpis: imię i nazwisko. Nazwy plików powinny być odnosić się do numerów zadań, które w danym pliku są rozwiązywane.
4. Dopuszczalne formaty wysyłanych plików to: pdf, doc, docx, png, jpg, jpeg, bmp. Przed wylogowaniem z egzaminu należy się upewnić, że pliki są w postaci czytelnej, w wypadkach problemów, skonsultować się z osobą prowadzącą egzamin.
5. Przed wysłaniem proszę się upewnić, że zaznaczyli Państwo oświadczenie o pracy samodzielnej i potwierdzenie, że to jest ostateczna wersja.
6. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.

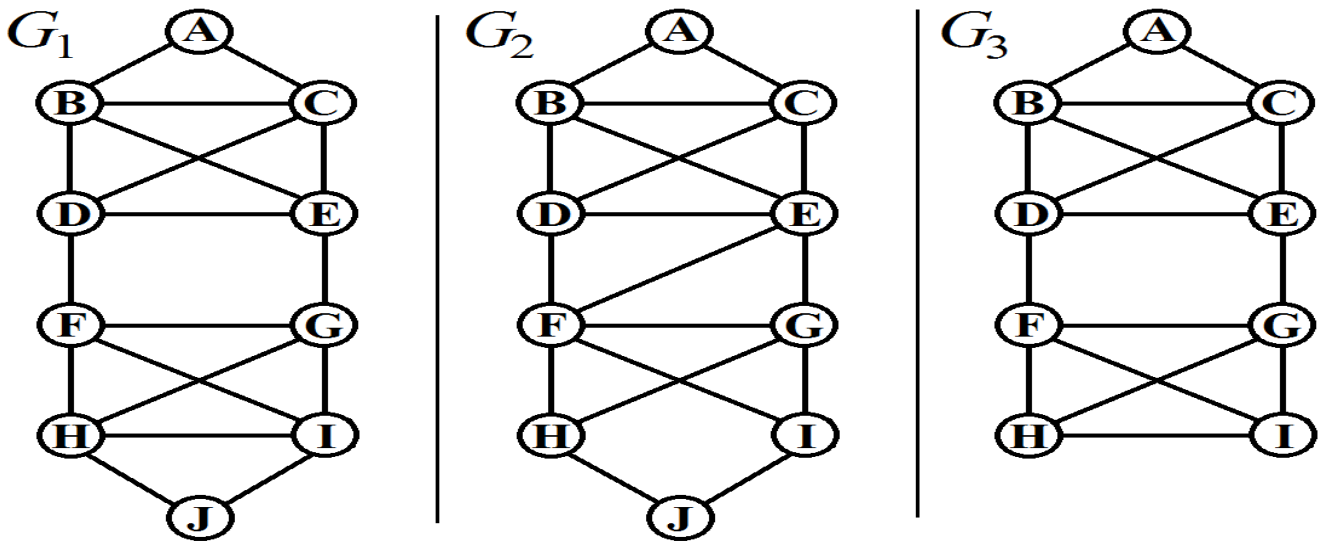
Zadania:

1. (400 punktów) Łowca potworów Grafalt z Rekurii poluje na ghule, wampiry, wilkołaki i upiory. Po zakończeniu kariery (w ciągu której unieszkodliwił co najmniej po 100 potworów każdego typu), musi uzupełnić pewne informacje dla Dyskretnego Biura Statystycznego.
 - a) Na te potwory polował w 60 województwach państwa Dyskretika. W 43 polował na ghule, w 36 na wampiry, w 31 na wilkołaki, a w 32 na upiory. Zarówno na ghule, jak i wampiry polował w 25 województwach, na ghule i wilkołaki oraz na ghule i upiory - w 22. Na wampiry i wilkołaki polował w 20 województwach, na wampiry i upiory w 24, a na wilkołaki i upiory w 18. Wreszcie zarówno na ghule, wampiry, jak i wilkołaki polował w 15 województwach, na ghule, wampiry i upiory w 17, na ghule, wilkołaki i upiory w 12, a na wampiry, wilkołaki i upiory w 15. W ilu województwach polował na wszystkie 4 typy potworów?
 - b) Grafalt pamięta, że 20 lat temu w ciągu roku upolował 16 ghuli, 4 wampiry, 3 wilkołaki i 8 upiorów, ale nie pamięta, w jakiej kolejności. Na ile sposobów mogło to się stać (jeśli założymy, że na potrzeby tego podpunktu 2 potwory tego samego typu są nierozróżnialne)?
 - c) Grafalt może odliczyć podatek od zysku z polowań na dokładnie 42 potwory, w tego co najmniej 3 każdego typu, spośród tych, które unieszkodliwił podczas swojej kariery. Na ile sposobów może wybrać potwory do odliczenia, jeśli dla urzędu skarbowego każde 2 potwory jednego typu (czyli np. dwa ghule, dwa wampiry itp.) są nierozróżnialne?
 - d) Potwory, które przetrwały polowania Grafalta (12 wampirów, 10 wilkołaków i 15 upiorów) postanowiły się zemścić za porażki współbraci. Plan był następujący: przez 6 nocy z rzędu miały wybrać wilkołaka (jednego na noc), który miał za zadanie wyć Grafaltowi pod oknem (wybrany wilkołak mógł się powtórzyć), a następnie łowcę miała napaść wybrana grupa 13 spośród umawiających się potworów, w tym dokładnie 5 upiorów i co najwyżej 2 wilkołaki. Na ile sposobów ten plan mógł być zrealizowany? W tym podpunkcie zakładamy, że każde dwa potwory są rozróżnialne między sobą.
2. (400 punktów) Udowodnić za pomocą indukcji matematycznej, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, liczba $3 \cdot 6^{k+1} + 4 \cdot 5^{2k+1}$ jest podzielna przez 19.
3. a) (250 punktów) Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną, która daje resztę 1 z dzielenia przez 7, resztę 4 z dzielenia przez 9 i resztę 3 z dzielenia przez 11.
 - b) (150 punktów) Obliczyć resztę z dzielenia liczby 22^{222} przez 375.

4. (400 punktów)

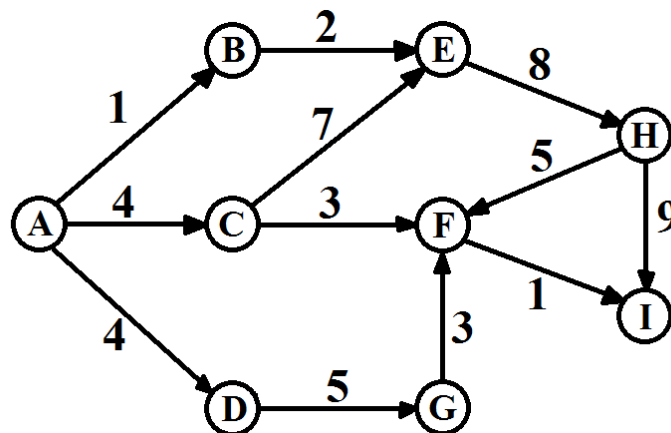
- a) Rozstrzygnąć, czy w grafie G_1 istnieje cykl Hamiltona i zapisać go, jeśli istnieje. Dla każdego z poniższych grafów (G_1, G_2, G_3) sprawdzić, czy występuje w nim cykl lub droga Eulera. Odpowiedź uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenie. Jeśli dla któregoś z grafów będzie istnieć droga Eulera, ale nie cykl Eulera, wykorzystać algorytm Fleury'ego do znalezienia jednej z tych dróg zapisując przebieg algorytmu w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać odpowiedź w postaci ciągu kolejnych odwiedzanych wierzchołków na tej drodze.

Nr etapu	Wybrany wierzchołek	Alternatywy
----------	---------------------	-------------

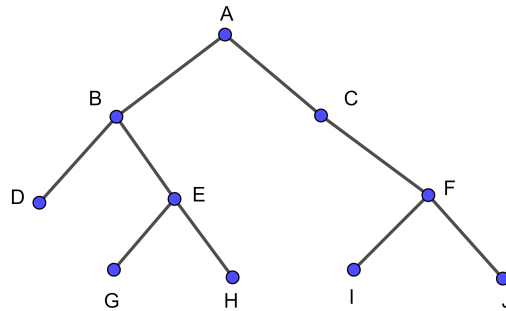


- b) Za pomocą algorytmu Edmondsa-Karpa znaleźć maksymalny przepływ od źródła A do ujścia I w poniższym grafie skierowanym. Podać wartość tego przepływu. Uzupełnić odpowiednią tabelę przebiegu algorytmu.

Nr etapu	Ścieżka powiększająca	Przepływ wzdłuż ścieżki	Alternatywne ścieżki powiększające
----------	-----------------------	-------------------------	------------------------------------



5. (400 punktów) a) Podać definicję porządku infiksowego. Zakodować poniższe drzewo w porządku prefiksowym, postfiksowym i infiksowym.



Następnie narysować 3 nieizomorficzne drzewa z wyróżnionym korzeniem (wskazując ten korzeń), które nie są izomorficzne z drzewem podanym w zadaniu oraz z grafem-drogą i dodatkowo spełniają warunek:

- A. Pierwsze drzewo ma ten sam zapis w porządku prefiksowym, co drzewo podane w zadaniu.
- B. Drugie drzewo ma ten sam zapis w porządku postfiksowym, co drzewo podane w zadaniu.
- C. Trzecie drzewo ma ten sam zapis w porządku infiksowym, co drzewo podane w zadaniu.

b) Co rozumiemy przez złożoność obliczeniową (czasową) algorytmu? Co to znaczy, że jakiś algorytm jest $O(n^3)$? Uporządkować w kolejności od najmniejszej do największej złożoności obliczeniowej następujące algorytmy:

- Algorytm A o złożoności obliczeniowej $O(4n \log n)$
- Algorytm B o złożoności obliczeniowej $O(n!)$
- Algorytm C o złożoności obliczeniowej $O(2^n + 5n)$
- Algorytm D o złożoności obliczeniowej $O((3n + 2)^2)$
- Algorytm E o złożoności obliczeniowej $O(10n^{\frac{3}{2}})$
- Algorytm F o złożoności obliczeniowej $O(\log(n^7))$.