13. Równania różniczkowe - portrety fazowe

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Portrety fazowe - wstęp

Istnieje wiele różnych technik rozwiązywania równań różniczkowych, jednak większości takich równań i tak nie da się rozwiązać. A, jak widzieliśmy, nawet jeśli się da, to jest to dość trudne, a ostateczną postać rozwiązania i tak trzeba zbadać, żeby wyciągnąć z tego jakieś wnioski.
Z drugiej strony, często okazuje się, że nie potrzebujemy ostatecznej postaci rozwiązania, a jedynie informacji, jak rozwiązania jakiegoś zagadnienia zachowują się na dłuższą metę, przy danych warunkach początkowych. Przykładem jest równanie inflacyjne Friedmana, w którym interesowało nas długoterminowe dostosowanie oczekiwań inflacyjnych do rzeczywistości, a nie dokładny wzór.

Przykład - równanie Friedmana

Dla stałego poziomu inflacji p, model Friedmana oczekiwań inflacyjnych jest zadany równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych:

$$\pi'(t) = a(p - \pi(t)),$$

Przykład - równanie Friedmana

Dla stałego poziomu inflacji p, model Friedmana oczekiwań inflacyjnych jest zadany równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych:

$$\pi'(t) = a(p - \pi(t)),$$

gdzie $a, p > 0$. To równanie da się rozwiązać, ale dużo prościej można odczytać wszystkie interesujące nas długoterminowe efekty z tzw. *portretu fazowego* tego równania.

Przykład - równanie Friedmana

Dla stałego poziomu inflacji p, model Friedmana oczekiwań inflacyjnych jest zadany równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych:

$$\pi'(t) = a(p - \pi(t)),$$

gdzie $a, p > 0$. To równanie da się rozwiązać, ale dużo prościej można odczytać wszystkie interesujące nas długoterminowe efekty z tzw. *portretu fazowego* tego równania. Można powiedzieć, że portret fazowy jest to rysunek obrazujący za pomocą strzałek na osi $\mathbb{R}$, jak zmieniają się wartości rozwiązań danego równania, w zależności od tego, jaki jest warunek początkowy.

Portret fazowy: definicja

Równanie autonomiczne

Równanie różniczkowe nazywamy autonomicznym, jeśli występuje w nim jedynie pochodna funkcji oraz sama funkcja, a zmienna niezależna nie występuje (poza argumentem funkcji). W postaci normalnej można je zapisać następująco: $y'(x) = f(y(x))$ (w przeciwieństwie do ogólnej postaci $y'(x) = f(x, y(x))$).

Portret fazowy: definicja

Równanie autonomiczne

Równanie różniczkowe nazywamy autonomicznym, jeśli występuje w nim jedynie pochodna funkcji oraz sama funkcja, a zmienna niezależna nie występuje (poza argumentem funkcji). W postaci normalnej można je zapisać następująco: $y'(x) = f(y(x))$ (w przeciwieństwie do ogólnej postaci $y'(x) = f(x, y(x))$).

Zwykły portret fazowy można zdefiniować dla równań autonomicznych:

Portret fazowy równania autonomicznego

Portret fazowy dla równania $y'(x) = f(y(x))$ to wykres odwzorowania $\mathbb{R} \in y \longrightarrow y'(x) \in \mathbb{R}^1$, zaznaczony na osi $\mathbb{R}$, gdzie $y'(x)$ traktujemy jako jednowymiarowy wektor i zaznaczamy za pomocą strzałki.

Portret fazowy: definicja

Portret fazowy równania autonomicznego

Portret fazowy dla równania $y'(x) = f(y(x))$ to wykres odwzorowania $\mathbb{R} \in y \rightarrow y'(x) \in \mathbb{R}^1$, zaznaczony na osi $\mathbb{R}$, gdzie $y'(x)$ traktujemy jako jednowymiarowy wektor i zaznaczamy za pomocą strzałki.

Oczywiście, w praktyce nie trzeba zaznaczać nieskończenie wielu strzałek, po jednej dla każdego punktu osi $\mathbb{R}$.

Portret fazowy: definicja

Portret fazowy równania autonomicznego

Portret fazowy dla równania $y'(x) = f(y(x))$ to wykres odwzorowania $\mathbb{R} \in y \to y'(x) \in \mathbb{R}^1$, zaznaczony na osi $\mathbb{R}$, gdzie $y'(x)$ traktujemy jako jednowymiarowy wektor i zaznaczamy za pomocą strzałki.

Oczywiście, w praktyce nie trzeba zaznaczać nieskończenie wielu strzałek, po jednej dla każdego punktu osi $\mathbb{R}$. Jako, że dużo bardziej istotny jest kierunek strzałki niż jej długość, wystarczy zaznaczyć po 1-2 strzałki w każdym przedziale, w którym pochodna $y'(x)$ ma ten sam znak i wiadomo wtedy, jak wygląda wykres w całej okolicy (na podstawie twierdzenia Darboux).

Portret fazowy: definicja

Portret fazowy równania autonomicznego

Portret fazowy dla równania $y'(x) = f(y(x))$ to wykres odwzorowania $\mathbb{R} \in y \to y'(x) \in \mathbb{R}^1$, zaznaczony na osi $\mathbb{R}$, gdzie $y'(x)$ traktujemy jako jednowymiarowy wektor i zaznaczamy za pomocą strzałki.

Oczywiście, w praktyce nie trzeba zaznaczać nieskończenie wielu strzałek, po jednej dla każdego punktu osi $\mathbb{R}$. Jako, że dużo bardziej istotny jest kierunek strzałki niż jej długość, wystarczy zaznaczyć po 1-2 strzałki w każdym przedziale, w którym pochodna $y'(x)$ ma ten sam znak i wiadomo wtedy, jak wygląda wykres w całej okolicy (na podstawie twierdzenia Darboux). Znak pochodnej $y'(x)$ jest po prostu równy znakowi $f(y(x))$, gdyż $y'(x) = f(y(x))$. Dlatego wystarczy przyrównywac do 0 wartości $f(y)$.

Portret fazowy: interpretacja

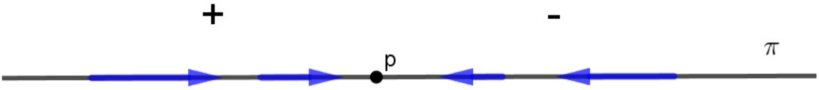
Możemy sobie wyobrazić, że portret fazowy pokazuje, w jaką stronę porusza się punkt położony na osi $\mathbb{R}$, jeśli jego ruchem „zarządza” dane równanie różniczkowe.

Portret fazowy - przykład 1

Równanie Friedmana $\pi'(t) = a(p - \pi(t))$ jest autonomiczne, bo zmienna t występuje tylko jako argument funkcji π.

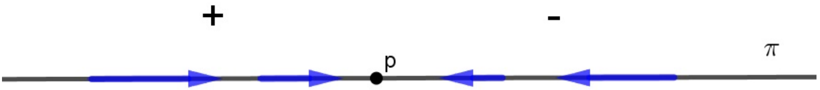
Portret fazowy - przykład 1

Równanie Friedmana $\pi'(t) = a(p - \pi(t))$ jest autonomiczne, bo zmienna t występuje tylko jako argument funkcji π. Badamy, jaki jest znak wyrażenia $a(p - \pi)$ i zaznaczamy odpowiednie wektory na osi $\mathbb{R}$, w zależności od wartości π.



Jak widać, otrzymujemy z rysunku podobne wnioski, co z wcześniejszych obliczeń: π maleje, jeśli jego wartość jest większa od p, a rośnie, gdy jego wartość jest mniejsza od p.

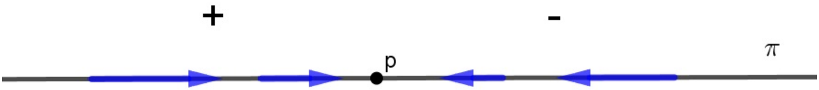
Punkt stały (stacjonarny)



Punkt stały (stacjonarny)

Jeśli funkcja stała, dana wzorem $y(x) = y_0$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y'(x) = f(x, y)$ dla pewnego $y_0 \in \mathbb{R}$ to y_0 nazywamy *punktem stałym* lub *stacjonarnym* tego równania.

Punkt stały (stacjonarny)

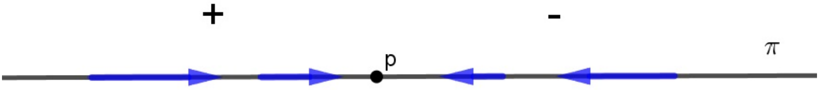


Punkt stały (stacjonarny)

Jeśli funkcja stała, dana wzorem $y(x) = y_0$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y'(x) = f(x, y)$ dla pewnego $y_0 \in \mathbb{R}$ to y_0 nazywamy *punktem stałym* lub *stacjonarnym* tego równania.

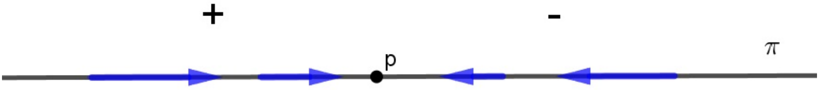
Dla równania Friedmana p jest punktem stałym.

Wątpliwości



Jak mocne wnioski możemy wyciągnąć z takiego portretu fazowego?

Wątpliwości



Jak mocne wnioski możemy wyciągnąć z takiego portretu fazowego? Czy rozwiązanie może „przeskoczyć" z jednej strony punktu p na drugą? Czy jego wartość może na dłuższą metę nie przybliżać się do punktu p?

Równania różniczkowe - jednoznaczność rozwiązań

Ważne tutaj będzie:

Twierdzenie Peano-Piccarda

Jeśli prawa strona postaci normalnej równania różniczkowego jest funkcją różniczkowalną w pewnym otoczeniu (x_0, y_0) to zagadnienie Cauchy'ego posiada dokładnie jedno rozwiązanie y w pewnym otoczeniu x_0.

Ważne tutaj będzie:

Twierdzenie Peano-Piccarda

Jeśli prawa strona postaci normalnej równania różniczkowego jest funkcją różniczkowalną w pewnym otoczeniu (x_0, y_0) to zagadnienie Cauchy'ego posiada dokładnie jedno rozwiązanie y w pewnym otoczeniu x_0.

Wynika z niego, że jeśli dla jakiegoś t_0 zachodzi $\pi(t_0) = p$, to wtedy, w otoczeniu tego punktu istnieje tylko jedno rozwiązanie. A wiemy, że $\pi(t) = p$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem $\pi'(t) = a(p - \pi(t))$ (bo pochodna jest równa 0).

Równania różniczkowe - jednoznaczność rozwiązań

Ważne tutaj będzie:

Twierdzenie Peano-Piccarda

Jeśli prawa strona postaci normalnej równania różniczkowego jest funkcją różniczkowalną w pewnym otoczeniu (x_0, y_0) to zagadnienie Cauchy'ego posiada dokładnie jedno rozwiązanie y w pewnym otoczeniu x_0.

Wynika z niego, że jeśli dla jakiegoś t_0 zachodzi $\pi(t_0) = p$, to wtedy, w otoczeniu tego punktu istnieje tylko jedno rozwiązanie. A wiemy, że $\pi(t) = p$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem $\pi'(t) = a(p - \pi(t))$ (bo pochodna jest równa 0). Zatem rozwiązania niestałe nie mogą przyjmować wartości p, ani tym bardziej „przechodzić na drugą stronę".

Równania różniczkowe - jednoznaczność rozwiązań

Nieco bardziej skomplikowana analiza może doprowadzić nas do następującego wniosku:

Graniczne zachowanie rozwiązań równania autonomicznego

Załóżmy, że funkcja y spełniająca równanie $y'(x) = f(y(x)) = f(y)$ może przyjmować wartości z przedziału (a, b), gdzie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, nie jest funkcją stałą. Wtedy y jest funkcją silnie monotoniczną w całej swojej dziedzinie, a jedyne wartości, jakie mogą przyjmować $\lim_{x \to \infty} y(x)$ i $\lim_{x \to -\infty} y(x)$ to a, b oraz punkty stałe równania $y'(x) = f(y)$.

Równania różniczkowe - jednoznaczność rozwiązań

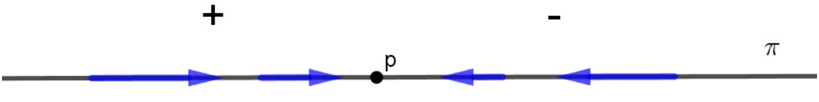
Nieco bardziej skomplikowana analiza może doprowadzić nas do następującego wniosku:

Graniczne zachowanie rozwiązań równania autonomicznego

Załóżmy, że funkcja y spełniająca równanie $y'(x) = f(y(x)) = f(y)$ może przyjmować wartości z przedziału (a, b), gdzie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, nie jest funkcją stałą. Wtedy y jest funkcją silnie monotoniczną w całej swojej dziedzinie, a jedyne wartości, jakie mogą przyjmować $\lim_{x\to\infty} y(x)$ i $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ to a, b oraz punkty stałe równania $y'(x) = f(y)$.

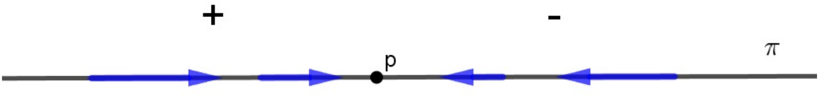
To twierdzenie pokazuje, że rozwiązanie równania autonomicznego nie może się „zatrzymać” w innym punkcie niż punkt stały, a gdy $(a, b) = (-\infty, \infty)$, to rozwiązanie może w nieskończoności tylko zbliżać się do punktu stałego lub „uciekać” do nieskończoności.

Rozwiązanie przykładu 1



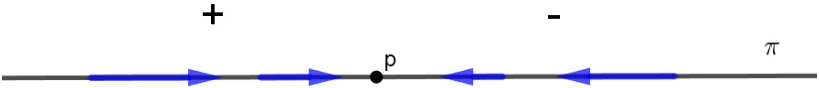
Dlatego, na podstawie portretu fazowego dla równania Friedmana możemy od razu stwierdzić, że niezależnie od warunku początkowego, wartości każdego z rozwiązań będą zbiegać do p. Wartość p i wartości zbliżone do niej są jedynymi obserwowalnymi na dłuższą metę stanami tego układu.

Rozwiązanie przykładu 1



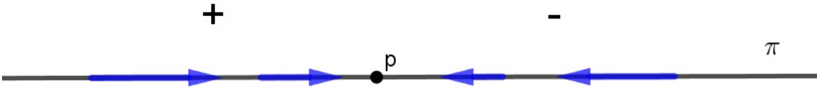
Dlatego, na podstawie portretu fazowego dla równania Friedmana możemy od razu stwierdzić, że niezależnie od warunku początkowego, wartości każdego z rozwiązań będą zbiegać do p. Wartość p i wartości zbliżone do niej są jedynymi obserwowalnymi na dłuższą metę stanami tego układu. Taki punkt stały, do którego zbiegają rozwiązania, których początkowe wartości nieco się od niego różnią (czyli pochodzą z jego sąsiedztwa) nazywamy *stabilnym* i takie punkty są obserwowalne jako długoterminowe rozwiązania układów równań.

Rozwiązanie przykładu 1



Można powiedzieć, że rozwiązania równania Friedmana ze stałym p dzielą się na 3 typy w zależności od warunku początkowego $\pi(t_0) = \pi_0$:

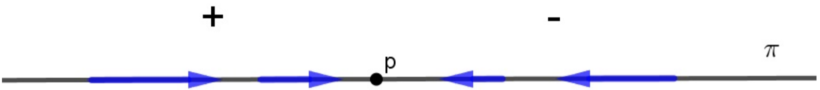
Rozwiązanie przykładu 1



Można powiedzieć, że rozwiązania równania Friedmana ze stałym p dzielą się na 3 typy w zależności od warunku początkowego $\pi(t_0) = \pi_0$:

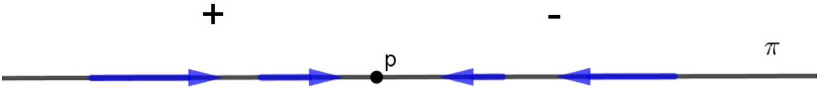
I. Rozwiązanie stałe, stabilne $\pi(t) = p$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ i $\pi_0 = p$;

Rozwiązanie przykładu 1



Można powiedzieć, że rozwiązania równania Friedmana ze stałym p dzielą się na 3 typy w zależności od warunku początkowego $\pi(t_0) = \pi_0$:
I. Rozwiązanie stałe, stabilne $\pi(t) = p$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ i $\pi_0 = p$;
II. Rozwiązania malejące, dla $\pi_0 > p$, takie, że $\lim_{x \to -\infty} \pi(t) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} \pi(t) = p$;

Rozwiązanie przykładu 1



Można powiedzieć, że rozwiązania równania Friedmana ze stałym p dzielą się na 3 typy w zależności od warunku początkowego $\pi(t_0) = \pi_0$:

I. Rozwiązanie stałe, stabilne $\pi(t) = p$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ i $\pi_0 = p$;

II. Rozwiązania malejące, dla $\pi_0 > p$, takie, że $\lim_{x \to -\infty} \pi(t) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} \pi(t) = p$;

III. Rozwiązania rosnące, dla $\pi_0 < p$, takie, że $\lim_{x \to -\infty} \pi(t) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} \pi(t) = p$.

Przykład 2

Równanie Friedmana dość łatwo da się rozwiązać standardowymi metodami i uzyskać ten sam rezultat, przyglądając się wzorowi rozwiązania (co zrobiliśmy w poprzednim rozdziale).

Przykład 2

Równanie Friedmana dość łatwo da się rozwiązać standardowymi metodami i uzyskać ten sam rezultat, przyglądając się wzorowi rozwiązania (co zrobiliśmy w poprzednim rozdziale). Powstaje pytanie, czy istnieją sytuacje, gdy metoda portretów fazowych daje nam istotnie lepsze wyniki, niż rozwiązywanie wprost.

Przykład 2

Równanie Friedmana dość łatwo da się rozwiązać standardowymi metodami i uzyskać ten sam rezultat, przyglądając się wzorowi rozwiązania (co zrobiliśmy w poprzednim rozdziale). Powstaje pytanie, czy istnieją sytuacje, gdy metoda portretów fazowych daje nam istotnie lepsze wyniki, niż rozwiązywanie wprost.
Warto tutaj zauważyć, że każde równanie autonomiczne $y'(x) = f(y)$ jest pewnym typem równania o zmiennych rozdzielonych i rozwiązanie można wyznaczyć, o ile potrafimy rozwiązać $\int \frac{1}{f(y)}\, dy = \int 1 dx$.

Przykład 2

Równanie Friedmana dość łatwo da się rozwiązać standardowymi metodami i uzyskać ten sam rezultat, przyglądając się wzorowi rozwiązania (co zrobiliśmy w poprzednim rozdziale). Powstaje pytanie, czy istnieją sytuacje, gdy metoda portretów fazowych daje nam istotnie lepsze wyniki, niż rozwiązywanie wprost.
Warto tutaj zauważyć, że każde równanie autonomiczne $y'(x) = f(y)$ jest pewnym typem równania o zmiennych rozdzielonych i rozwiązanie można wyznaczyć, o ile potrafimy rozwiązać $\int \frac{1}{f(y)}\, dy = \int 1 dx$. Jednakże, takie równanie może mieć rozwiązanie w skomplikowanej postaci (np. uwikłanej), która nie mówi nam wiele o jakościowych wnioskach z wyniku lub też, jak za chwilę zobaczymy, całka po lewej stronie może być za trudna do obliczenia.

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

Najpierw zauważmy, że funkcja dana wzorem $y(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem tego równania.

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

Najpierw zauważmy, że funkcja dana wzorem $y(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem tego równania.
Dla $y \neq 0$ możemy zapisać: $y'(x) = \frac{\sin y}{y}$.

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

Najpierw zauważmy, że funkcja dana wzorem $y(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem tego równania.
Dla $y \neq 0$ możemy zapisać: $y'(x) = \frac{\sin y}{y}$. Oczywiście, jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, którego rozwiązania spełniają zależność $\int \frac{y}{\sin y}\, dy = \int 1 dx$.

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

Najpierw zauważmy, że funkcja dana wzorem $y(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem tego równania.
Dla $y \neq 0$ możemy zapisać: $y'(x) = \frac{\sin y}{y}$. Oczywiście, jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, którego rozwiązania spełniają zależność $\int \frac{y}{\sin y}\, dy = \int 1 dx$. Jednakże, takie podejście jest bezużyteczne, bo całka po lewej stronie tego równania nie ma rozwiązania, które da się zapisać za pomocą funkcji elementarnych.

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

By narysować portret fazowy równania $y'(x) = \frac{\sin y}{y}$ musimy jedynie porównać jego prawą stronę z 0.

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

By narysować portret fazowy równania $y'(x) = \frac{\sin y}{y}$ musimy jedynie porównać jego prawą stronę z 0. $\frac{\sin y}{y}$ przyjmuje wartość 0 dla

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

By narysować portret fazowy równania $y'(x) = \frac{\sin y}{y}$ musimy jedynie porównać jego prawą stronę z 0. $\frac{\sin y}{y}$ przyjmuje wartość 0 dla wielokrotności π. Dla $k \geqslant 0$, jeśli $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, to

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

By narysować portret fazowy równania $y'(x) = \frac{\sin y}{y}$ musimy jedynie porównać jego prawą stronę z 0. $\frac{\sin y}{y}$ przyjmuje wartość 0 dla wielokrotności π. Dla $k \geqslant 0$, jeśli $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} > 0$, a gdy $y \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} < 0$. Z kolei dla $k < 0$, jeśli jeśli $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, to

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

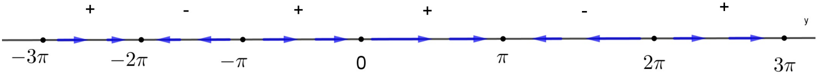
By narysować portret fazowy równania $y'(x) = \frac{\sin y}{y}$ musimy jedynie porównać jego prawą stronę z 0. $\frac{\sin y}{y}$ przyjmuje wartość 0 dla wielokrotności π. Dla $k \geqslant 0$, jeśli $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} > 0$, a gdy $y \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} < 0$. Z kolei dla $k < 0$, jeśli jeśli $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} < 0$, a gdy $y \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} > 0$.

Przykład 2

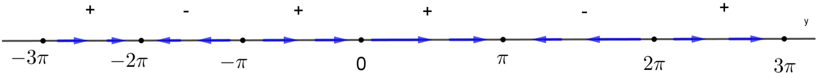
$\frac{\sin y}{y}$ przyjmuje wartość 0 dla wielokrotności π. Dla $k \geqslant 0$, jeśli $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} > 0$, a gdy $y \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} < 0$. Z kolei dla $k < 0$, jeśli jeśli $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} < 0$, a gdy $y \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} > 0$.

Przykład 2

$\frac{\sin y}{y}$ przyjmuje wartość 0 dla wielokrotności π. Dla $k \geqslant 0$, jeśli $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} > 0$, a gdy $y \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} < 0$. Z kolei dla $k < 0$, jeśli jeśli $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} < 0$, a gdy $y \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, to $\frac{\sin y}{y} > 0$.
Uwzględniając, że $y = 0$ też jest rozwiązaniem, otrzymujemy portret fazowy dla wyjściowego równania $y \cdot y'(x) = \sin y$:

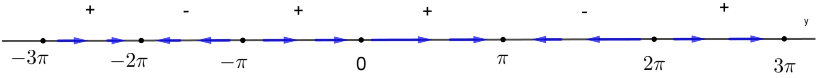


Przykład 2



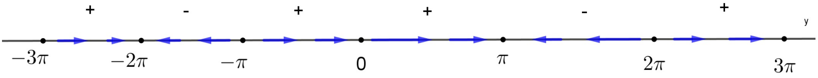
Z takiego portretu możemy odczytać właściwie wszystkie informacje dotyczące długoterminowych zachowań rozwiązań równania $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego y_0.

Przykład 2



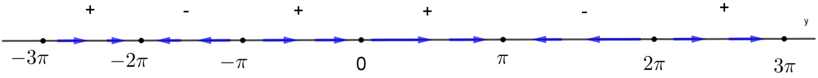
Z takiego portretu możemy odczytać właściwie wszystkie informacje dotyczące długoterminowych zachowań rozwiązań równania $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego y_0. Przede wszystkim mamy rozwiązania stałe $y(x) = k\pi$ dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2



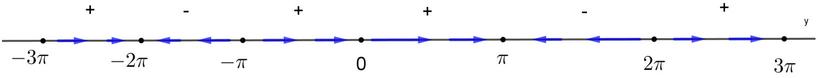
Z takiego portretu możemy odczytać właściwie wszystkie informacje dotyczące długoterminowych zachowań rozwiązań równania $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego y_0. Przede wszystkim mamy rozwiązania stałe $y(x) = k\pi$ dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$. Jednak, jak widać z rysunku, takie rozwiązania są stabilne tylko dla nieparzystych dodatnich i parzystych ujemnych wielokrotności π.

Przykład 2



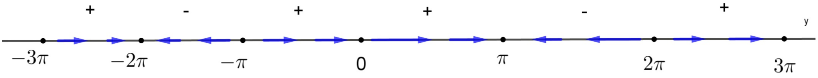
Punkty stałe takie jak $-\pi$ i 2π są rozwiązaniami równania, ale nie są stabilne: żeby zaobserwować je jako długoterminowe zachowania musielibyśmy wystartować dokładnie w takich punktach.

Przykład 2



Punkty stałe takie jak $-\pi$ i 2π są rozwiązaniami równania, ale nie są stabilne: żeby zaobserwować je jako długoterminowe zachowania musielibyśmy wystartować dokładnie w takich punktach. Takie punkty stacjonarne nazywamy niestabilnymi.

Przykład 2



Punkty stałe takie jak $-\pi$ i 2π są rozwiązaniami równania, ale nie są stabilne: żeby zaobserwować je jako długoterminowe zachowania musielibyśmy wystartować dokładnie w takich punktach. Takie punkty stacjonarne nazywamy niestabilnymi. Istnieje jeszcze nietypowy punkt stacjonarny 0, o którym możnaby powiedzieć nieformalnie, że jest „półstabilny” - rozwiązania o wartościach nieco mniejszych od 0 przybliżają się do niego, a rozwiązania o wartościach nieco większych od 0 oddalają się od niego. (formalnie taki punkt też się nazywa niestabilnym, ale możemy go zaobserwować jako rozwiązanie długoterminowe).

Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

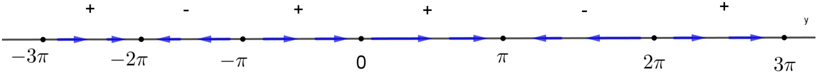
Przykład 2

Zadanie

Opisać jakościowo rozwiązania równania: $y \cdot y'(x) = \sin y$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

Odpowiedzią na takie pytanie jest zatem narysowanie portretu fazowego i opisanie wszystkich typów rozwiązań w zależności od y_0.

Przykład 2

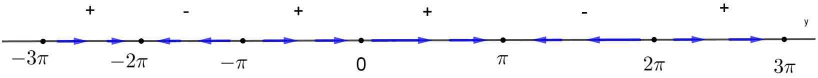


I. Jeśli $y_0 = k\pi$ dla dowolnego $k \in Z$ to rozwiązanie tego zagadnienia jest funkcją stałą $y(x) = k\pi$. Dla k dodatnich i nieparzystych oraz dla k ujemnych i parzystych takie rozwiązania są stabilne.

II. Jeśli $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ dla $k \geqslant 0$ to $y(x)$ jest funkcją rosnącą, $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 2k\pi$, $\lim_{x \to \infty} y(x) = (2k+1)\pi$.

III. Jeśli $y \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ dla $k \geqslant 0$ to $y(x)$ jest funkcją malejącą, $\lim_{x \to -\infty} y(x) = (2k+2)\pi$, $\lim_{x \to \infty} y(x) = (2k+1)\pi$.

Przykład 2



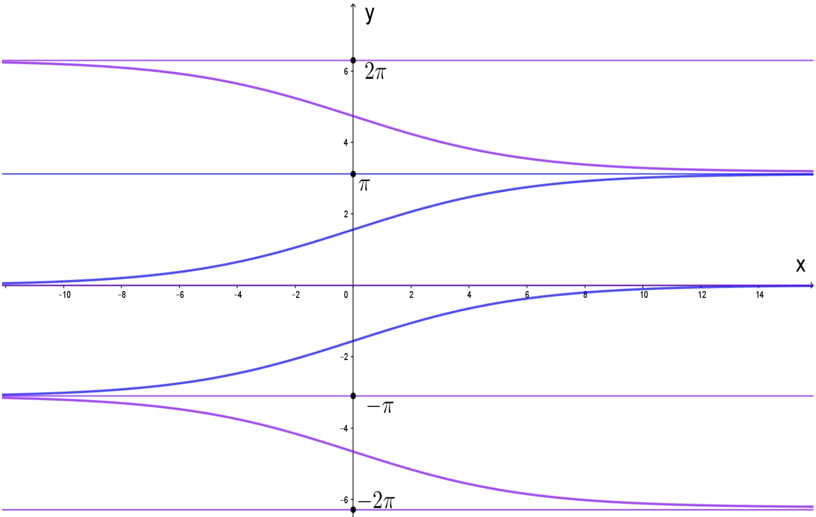
IV. Jeśli $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ dla $k < 0$ to $y(x)$ jest funkcją malejącą, $\lim_{x \to -\infty} y(x) = (2k+1)\pi$, $\lim_{x \to \infty} y(x) = 2k\pi$.

V. Jeśli $y \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ dla $k \geqslant 0$ to $y(x)$ jest funkcją rosnącą, $\lim_{x \to -\infty} y(x) = (2k+1)\pi$, $\lim_{x \to \infty} y(x) = (2k+2)\pi$.

Te 5 podpunktów rozpatruje wszystkie możliwości.

Przykład 2

Te wszystkie typy rozwiązań możemy narysować w klasycznym układzie współrzędnych:



Równania nieautonomiczne

Metoda graficzna ma zastosowanie również dla równań nieautonomicznych. Rysuje się wtedy tzw. rozszerzone portrety fazowe na $\mathbb{R}^2$, jednak wnioskowanie z nich jest o wiele trudniejsze, więc nie będziemy się tym zajmować w ramach tego kursu.