1a. Granice funkcji - symbole nieoznaczone

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Symbole nieoznaczone

Symbole nieoznaczone to takie działania na rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych, których wykonać się nie da bez dodatkowych informacji.

Symbole nieoznaczone

Symbole nieoznaczone to takie działania na rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych, których wykonać się nie da bez dodatkowych informacji. Są to:

Symbole nieoznaczone

$[\infty - \infty]; [\infty \cdot 0]; [\frac{0}{0}]; [\frac{\infty}{\infty}]; [1^{\infty}];\ [0^0]; [\infty^0]$ (w miejsce ∞ w tych symbolach można równie dobrze wstawić $-\infty$).

Symbole nieoznaczone

Symbole nieoznaczone to takie działania na rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych, których wykonać się nie da bez dodatkowych informacji. Są to:

Symbole nieoznaczone

$[\infty - \infty]$; $[\infty \cdot 0]$; $[\frac{0}{0}]$; $[\frac{\infty}{\infty}]$; $[1^\infty]$; $[0^0]$; $[\infty^0]$ (w miejsce ∞ w tych symbolach można równie dobrze wstawić $-\infty$).

Nie można ich „obliczyć" - by policzyć granice, które po podstawieniu dają taki wynik, trzeba dokonać dalszych przekształceń bądź skorzystać z odpowiedniego twierdzenia.

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2}$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = [\frac{\infty}{\infty}]$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x}$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}]$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x \to \infty} 1$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1.$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x \to \infty} 1 = 1.$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x}$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = [\frac{\infty}{\infty}]$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} x$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $[\frac{\infty}{\infty}]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty.$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ jest symbolem nieoznaczonym

Na przykładach pokażę, dlaczego $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ jest symbolem nieoznaczonym (ćwiczenie - zrobić to samo dla pozostałych symboli).

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty.$

Jak widać, granice opisane symbolem $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ mogą dawać 3 różne wyniki (a dałoby się skonstruować o wiele więcej przykładów z jeszcze innymi wynikami) - dlatego nie jesteśmy w stanie powiedzieć bez dalszych obliczeń, jaki jest wynik, jeśli do tego symbolu dojdziemy.

Symbol $\left[\frac{a}{0}\right]$

Symbolem nieoznaczonym jest też formalnie $\left[\frac{a}{0}\right]$, gdy $a \neq 0$, ale z nim akurat łatwo sobie poradzić - wynikiem jest zawsze $\pm\infty$, a znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika.

Symbol $\left[\frac{a}{0}\right]$

Symbolem nieoznaczonym jest też formalnie $\left[\frac{a}{0}\right]$, gdy $a \neq 0$, ale z nim akurat łatwo sobie poradzić - wynikiem jest zawsze $\pm\infty$, a znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika.

Przykład

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{x-1}$.

Symbol $[\frac{a}{0}]$

Symbolem nieoznaczonym jest też formalnie $[\frac{a}{0}]$, gdy $a \neq 0$, ale z nim akurat łatwo sobie poradzić - wynikiem jest zawsze $\pm\infty$, a znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika.

Przykład

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{x-1}$.

Musimy wykonać te obliczenia w dwóch krokach (bo znak mianownika zależy od tego, czy do 1 zbliżamy się z lewej, czy z prawej strony).

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-2}{x-1}$

Symbol $[\frac{a}{0}]$

Symbolem nieoznaczonym jest też formalnie $[\frac{a}{0}]$, gdy $a \neq 0$, ale z nim akurat łatwo sobie poradzić - wynikiem jest zawsze $\pm\infty$, a znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika.

Przykład

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{x-1}$.

Musimy wykonać te obliczenia w dwóch krokach (bo znak mianownika zależy od tego, czy do 1 zbliżamy się z lewej, czy z prawej strony).

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x-1} = [\frac{-1}{0^+}]$

Symbol $[\frac{a}{0}]$

Symbolem nieoznaczonym jest też formalnie $[\frac{a}{0}]$, gdy $a \neq 0$, ale z nim akurat łatwo sobie poradzić - wynikiem jest zawsze $\pm\infty$, a znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika.

Przykład

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{x-1}$.

Musimy wykonać te obliczenia w dwóch krokach (bo znak mianownika zależy od tego, czy do 1 zbliżamy się z lewej, czy z prawej strony).

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-2}{x-1} = [\frac{-1}{0^+}] = -\infty$ (bo licznik i mianownik są różnych znaków).

Symbol $\left[\frac{a}{0}\right]$

Symbolem nieoznaczonym jest też formalnie $\left[\frac{a}{0}\right]$, gdy $a \neq 0$, ale z nim akurat łatwo sobie poradzić - wynikiem jest zawsze $\pm\infty$, a znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika.

Przykład

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{x-1}$.

Musimy wykonać te obliczenia w dwóch krokach (bo znak mianownika zależy od tego, czy do 1 zbliżamy się z lewej, czy z prawej strony).

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-2}{x-1} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$ (bo licznik i mianownik są różnych znaków).

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x-1}$

Symbol $[\frac{a}{0}]$

Symbolem nieoznaczonym jest też formalnie $[\frac{a}{0}]$, gdy $a \neq 0$, ale z nim akurat łatwo sobie poradzić - wynikiem jest zawsze $\pm\infty$, a znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika.

Przykład

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{x-1}$.

Musimy wykonać te obliczenia w dwóch krokach (bo znak mianownika zależy od tego, czy do 1 zbliżamy się z lewej, czy z prawej strony).

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x-1} = [\frac{-1}{0^+}] = -\infty$ (bo licznik i mianownik są różnych znaków).

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x-2}{x-1} = [\frac{-1}{0^-}]$

Symbol $\left[\frac{a}{0}\right]$

Symbolem nieoznaczonym jest też formalnie $\left[\frac{a}{0}\right]$, gdy $a \neq 0$, ale z nim akurat łatwo sobie poradzić - wynikiem jest zawsze $\pm\infty$, a znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika.

Przykład

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{x-1}$.

Musimy wykonać te obliczenia w dwóch krokach (bo znak mianownika zależy od tego, czy do 1 zbliżamy się z lewej, czy z prawej strony).

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-2}{x-1} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$ (bo licznik i mianownik są różnych znaków).

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x-1} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$ (bo licznik i mianownik są tych samych znaków).

Symbol $[\frac{a}{0}]$

Symbolem nieoznaczonym jest też formalnie $[\frac{a}{0}]$, gdy $a \neq 0$, ale z nim akurat łatwo sobie poradzić - wynikiem jest zawsze $\pm\infty$, a znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika.

Przykład

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{x-1}$.

Musimy wykonać te obliczenia w dwóch krokach (bo znak mianownika zależy od tego, czy do 1 zbliżamy się z lewej, czy z prawej strony).

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x-1} = [\frac{-1}{0^+}] = -\infty$ (bo licznik i mianownik są różnych znaków).

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x-2}{x-1} = [\frac{-1}{0^-}] = +\infty$ (bo licznik i mianownik są tych samych znaków).

Oczywiście, w związku z tym $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{x-1}$ nie istnieje (bo granice jednostronne są różne).

$[\frac{\infty}{\infty}], [\frac{0}{0}]$ - ogólne zasady

Do granic typu $[\frac{\infty}{\infty}]$ i $[\frac{0}{0}]$ najlepiej stosować regułę de L'Hospitala, którą wkrótce poznamy (ale do tego potrzebne nam będą pochodne).

$[\frac{\infty}{\infty}], [\frac{0}{0}]$ - ogólne zasady

Do granic typu $[\frac{\infty}{\infty}]$ i $[\frac{0}{0}]$ najlepiej stosować regułę de L'Hospitala, którą wkrótce poznamy (ale do tego potrzebne nam będą pochodne). Dość łatwo można poradzić sobie natomiast z niektórymi szczególnymi przypadkami:

$[\frac{\infty}{\infty}], [\frac{0}{0}]$ - ogólne zasady

Do granic typu $[\frac{\infty}{\infty}]$ i $[\frac{0}{0}]$ najlepiej stosować regułę de L'Hospitala, którą wkrótce poznamy (ale do tego potrzebne nam będą pochodne). Dość łatwo można poradzić sobie natomiast z niektórymi szczególnymi przypadkami:
Po pierwsze, funkcje wymierne (ilorazy wielomianów) i funkcje „wymiernopodobne" (ilorazy funkcji wielomianopodobnych). Przy obliczaniu ich granic w nieskończoności, dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę w mianowniku.

$[\frac{\infty}{\infty}], [\frac{0}{0}]$ - ogólne zasady

Do granic typu $[\frac{\infty}{\infty}]$ i $[\frac{0}{0}]$ najlepiej stosować regułę de L'Hospitala, którą wkrótce poznamy (ale do tego potrzebne nam będą pochodne). Dość łatwo można poradzić sobie natomiast z niektórymi szczególnymi przypadkami:
Po pierwsze, funkcje wymierne (ilorazy wielomianów) i funkcje „wymiernopodobne" (ilorazy funkcji wielomianopodobnych). Przy obliczaniu ich granic w nieskończoności, dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę w mianowniku. Po tej operacji, w mianowniku (w granicy) uzyskamy liczbę, więc unikniemy symbolu nieoznaczonego.

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Przykład

$\lim_{x \to \infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = [\frac{-\infty}{\infty}] = ?$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2-x}{x^2-x-2}$$

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Przykład

$\lim_{x \to \infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = [\frac{-\infty}{\infty}] = ?$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x})}{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}$$

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Przykład

$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = [\frac{-\infty}{\infty}] = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

Funkcje „wymiernopodobne" - ogólne zasady

Przykład

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = [\frac{-\infty}{\infty}] = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Przykład

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = [\frac{-\infty}{\infty}] = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Przykład

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+1}{x^3-x-2} = [\frac{-\infty}{-\infty}] = ?$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+1}{x^3-x-2}$$

Funkcje „wymiernopodobne" - ogólne zasady

Przykład

$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = [\frac{-\infty}{\infty}] =?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Przykład

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+1}{x^3-x-2} = [\frac{-\infty}{-\infty}] =?$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+1}{x^3-x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(3+\frac{1}{x^3})}{x^3(1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3})}$$

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Przykład

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = [\frac{-\infty}{\infty}] = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Przykład

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+1}{x^3-x-2} = [\frac{-\infty}{-\infty}] = ?$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+1}{x^3-x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(3+\frac{1}{x^3})}{x^3(1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3})} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}$$

Funkcje „wymiernopodobne" - ogólne zasady

Przykład

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = [\frac{-\infty}{\infty}] = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Przykład

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+1}{x^3-x-2} = [\frac{-\infty}{-\infty}] = ?$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+1}{x^3-x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(3+\frac{1}{x^3})}{x^3(1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3})} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}} = 3.$$

Funkcje „wymiernopodobne" - twierdzenia

Można też do takich granic w nieskończonościach zastosować poniższe twierdzenie:

Twierdzenie o granicach funkcji wymiernych

Niech f, g będą wielomianami, takimi że stopień f wynosi n, a stopień g wynosi m. Wtedy:

a) Jeśli $n > m$, to $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ wynoszą $\pm\infty$. Znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika w pobliżu $\pm\infty$.

b) Jeśli $n < m$, to $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

c) Jeśli $n = m$, to $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q}$, gdzie p jest współczynnikiem przy x^n w wielomianie f, a g jest współczynnikiem przy x^m w wielomianie g.

Funkcje „wymiernopodobne” - twierdzenia

Twierdzenie o granicach funkcji wymiernych

Niech f, g będą wielomianami, takimi że stopień f wynosi n, a stopień g wynosi m. Wtedy:

a) Jeśli $n > m$, to $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ i $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ wynoszą $\pm\infty$. Znak wyniku zależy od znaku licznika i mianownika w pobliżu $\pm\infty$.

b) Jeśli $n < m$, to $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

c) Jeśli $n = m$, to $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q}$, gdzie p jest współczynnikiem przy x^n w wielomianie f, a g jest współczynnikiem przy x^m w wielomianie g.

Twierdzenie to obowiązuje również dla funkcji „wielomianopodobnych”. Przez stopień takiej funkcji rozumiemy wtedy najwyższą potęgę w której x występuje w danej funkcji.

Funkcje „wymiernopodobne" - ogólne zasady

Jeśli są to granice typu $\lim_{x \to c} \frac{W(x)}{Z(x)}$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, $W(c) = Z(c) = 0$, to rozkładamy wielomiany W i Z na czynniki pierwsze i staramy się skrócić przez $(x - c)$ w liczniku i mianowniku (da się to zrobić dzięki twierdzeniu Bezouta).

Funkcje „wymiernopodobne" - ogólne zasady

Jeśli są to granice typu $\lim_{x\to c} \frac{W(x)}{Z(x)}$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, $W(c) = Z(c) = 0$, to rozkładamy wielomiany W i Z na czynniki pierwsze i staramy się skrócić przez $(x - c)$ w liczniku i mianowniku (da się to zrobić dzięki twierdzeniu Bezouta).

Przykład

$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{x^2-x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = ?$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{x^2-x-2}$$

Funkcje „wymiernopodobne" - ogólne zasady

Jeśli są to granice typu $\lim\limits_{x\to c} \frac{W(x)}{Z(x)}$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, $W(c) = Z(c) = 0$, to rozkładamy wielomiany W i Z na czynniki pierwsze i staramy się skrócić przez $(x - c)$ w liczniku i mianowniku (da się to zrobić dzięki twierdzeniu Bezouta).

Przykład

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{2-x}{x^2-x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] =?$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Jeśli są to granice typu $\lim_{x\to c} \frac{W(x)}{Z(x)}$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, $W(c) = Z(c) = 0$, to rozkładamy wielomiany W i Z na czynniki pierwsze i staramy się skrócić przez $(x - c)$ w liczniku i mianowniku (da się to zrobić dzięki twierdzeniu Bezouta).

Przykład

$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{x^2-x-2} = [\frac{0}{0}] =?$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x+1)}$$

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Jeśli są to granice typu $\lim\limits_{x \to c} \frac{W(x)}{Z(x)}$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, $W(c) = Z(c) = 0$, to rozkładamy wielomiany W i Z na czynniki pierwsze i staramy się skrócić przez $(x - c)$ w liczniku i mianowniku (da się to zrobić dzięki twierdzeniu Bezouta).

Przykład

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{2-x}{x^2-x-2} = [\frac{0}{0}] =?$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{-1}{(x+1)} = -\frac{1}{3}.$$

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Zauważmy, że w tej sytuacji nie zadziała procedura, którą stosowaliśmy w ∞. Co prawda, możemy przekształcić:

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Zauważmy, że w tej sytuacji nie zadziała procedura, którą stosowaliśmy w ∞. Co prawda, możemy przekształcić:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{x^2-x-2}$$

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Zauważmy, że w tej sytuacji nie zadziała procedura, którą stosowaliśmy w ∞. Co prawda, możemy przekształcić:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}$$

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Zauważmy, że w tej sytuacji nie zadziała procedura, którą stosowaliśmy w ∞. Co prawda, możemy przekształcić:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}},$$

Funkcje „wymiernopodobne” - ogólne zasady

Zauważmy, że w tej sytuacji nie zadziała procedura, którą stosowaliśmy w ∞. Co prawda, możemy przekształcić:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}},$$

ale nic nam to nie pomaga, bo dla $x=2$ $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{x^2}=\frac{1}{2}$, więc nie możemy skorzystać z faktu, że $\frac{1}{x}$ i $\frac{2}{x^2}$ dążą do zera (bo nie dążą) i pominąć te wyrazy w końcowych obliczeniach.

Funkcje „wymiernopodobne" - ogólne zasady

Zauważmy, że w tej sytuacji nie zadziała procedura, którą stosowaliśmy w ∞. Co prawda, możemy przekształcić:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}},$$

ale nic nam to nie pomaga, bo dla $x=2$ $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{x^2}=\frac{1}{2}$, więc nie możemy skorzystać z faktu, że $\frac{1}{x}$ i $\frac{2}{x^2}$ dążą do zera (bo nie dążą) i pominąć te wyrazy w końcowych obliczeniach.
Podobnie, nie działają ogólne twierdzenia o granicach takich ilorazów w nieskończoności.

Ilorazy funkcji wykładniczych

Przy obliczaniu granic w nieskończoności ilorazów funkcji wykładniczych (i ich sum), stosujemy taką samą metodę, jak przy wielomianach. Różnicą jest tylko to, że staramy się wpierw sprowadzić wszystkie składniki do tego samego wykładnika, a potem dzielimy przez składnik o największej podstawie.

Ilorazy funkcji wykładniczych

Przy obliczaniu granic w nieskończoności ilorazów funkcji wykładniczych (i ich sum), stosujemy taką samą metodę, jak przy wielomianach. Różnicą jest tylko to, że staramy się wpierw sprowadzić wszystkie składniki do tego samego wykładnika, a potem dzielimy przez składnik o największej podstawie.

Przykład

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5\cdot 3^x+4^x}{3\cdot 2^{2x+1}+8\cdot 3^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 3^x+4^x}{3\cdot 2^{2x+1}+8\cdot 3^x}$$

Ilorazy funkcji wykładniczych

Przy obliczaniu granic w nieskończoności ilorazów funkcji wykładniczych (i ich sum), stosujemy taką samą metodę, jak przy wielomianach. Różnicą jest tylko to, że staramy się wpierw sprowadzić wszystkie składniki do tego samego wykładnika, a potem dzielimy przez składnik o największej podstawie.

Przykład

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5\cdot 3^x+4^x}{3\cdot 2^{2x+1}+8\cdot 3^x} = [\frac{\infty}{\infty}] = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 3^x+4^x}{3\cdot 2^{2x+1}+8\cdot 3^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 3^x+4^x}{6\cdot 4^x+8\cdot 3^x}$$

Ilorazy funkcji wykładniczych

Przy obliczaniu granic w nieskończoności ilorazów funkcji wykładniczych (i ich sum), stosujemy taką samą metodę, jak przy wielomianach. Różnicą jest tylko to, że staramy się wpierw sprowadzić wszystkie składniki do tego samego wykładnika, a potem dzielimy przez składnik o największej podstawie.

Przykład

$\lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 3^x+4^x}{3\cdot 2^{2x+1}+8\cdot 3^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 3^x+4^x}{3\cdot 2^{2x+1}+8\cdot 3^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 3^x+4^x}{6\cdot 4^x+8\cdot 3^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x+1}{6+8\cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x}$$

Ilorazy funkcji wykładniczych

Przy obliczaniu granic w nieskończoności ilorazów funkcji wykładniczych (i ich sum), stosujemy taką samą metodę, jak przy wielomianach. Różnicą jest tylko to, że staramy się wpierw sprowadzić wszystkie składniki do tego samego wykładnika, a potem dzielimy przez składnik o największej podstawie.

Przykład

$\lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 3^x+4^x}{3\cdot 2^{2x+1}+8\cdot 3^x} = [\frac{\infty}{\infty}] = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 3^x+4^x}{3\cdot 2^{2x+1}+8\cdot 3^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 3^x+4^x}{6\cdot 4^x+8\cdot 3^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot (\frac{3}{4})^x+1}{6+8\cdot (\frac{3}{4})^x} = \frac{1}{6}.$$

(bo $(\frac{3}{4})^x$ dąży do 0, gdy x dąży do ∞ - symbol oznaczony j)).

$[\infty \cdot 0]$ - ogólne zasady

Z granicami typu $[\infty \cdot 0]$ najczęściej sobie radzimy korzystając z faktu, że dzielenie to jest to samo, co mnożenie przez odwrotność i sprowadzając je do postaci $[\frac{\infty}{\infty}]$ lub $[\frac{0}{0}]$ (wrócimy do tego przy okazji reguły de L'Hospitala).

$[\infty - \infty]$ - ogólne zasady

Przy pomocy wzorów skróconego mnożenia, możemy często „przerobić na ułamki" i w ten sposób sprowadzić do postaci, z którą umiemy sobie poradzić, symbole nieoznaczone typu $[\infty - \infty]$.

$[\infty - \infty]$ - ogólne zasady

Przy pomocy wzorów skróconego mnożenia, możemy często „przerobić na ułamki” i w ten sposób sprowadzić do postaci, z którą umiemy sobie poradzić, symbole nieoznaczone typu $[\infty - \infty]$.

Przykład

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-4}) = [\infty - \infty] = ?$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-4})$$

$[\infty - \infty]$ - ogólne zasady

Przy pomocy wzorów skróconego mnożenia, możemy często „przerobić na ułamki" i w ten sposób sprowadzić do postaci, z którą umiemy sobie poradzić, symbole nieoznaczone typu $[\infty - \infty]$.

Przykład

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x} - \sqrt{x-4}) = [\infty - \infty] = ?$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x} - \sqrt{x-4}) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-4})(\sqrt{x} + \sqrt{x-4})}{\sqrt{x} + \sqrt{x-4}}$$

$[\infty - \infty]$ - ogólne zasady

Przy pomocy wzorów skróconego mnożenia, możemy często „przerobić na ułamki” i w ten sposób sprowadzić do postaci, z którą umiemy sobie poradzić, symbole nieoznaczone typu $[\infty - \infty]$.

Przykład

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x} - \sqrt{x-4}) = [\infty - \infty] = ?$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x} - \sqrt{x-4}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-4})(\sqrt{x} + \sqrt{x-4})}{\sqrt{x} + \sqrt{x-4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x - (x-4)}{\sqrt{x} + \sqrt{x-4}}$$

$[\infty - \infty]$ - ogólne zasady

Przy pomocy wzorów skróconego mnożenia, możemy często „przerobić na ułamki” i w ten sposób sprowadzić do postaci, z którą umiemy sobie poradzić, symbole nieoznaczone typu $[\infty - \infty]$.

Przykład

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x} - \sqrt{x-4}) = [\infty - \infty] =?$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x} - \sqrt{x-4}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-4})(\sqrt{x} + \sqrt{x-4})}{\sqrt{x} + \sqrt{x-4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-(x-4)}{\sqrt{x} + \sqrt{x-4}} = [\frac{4}{\infty + \infty}] = 0.$$

Kapitalizacja ciągła

Przykład

Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Ile kapitału będzie na lokacie po roku, jeśli okres kapitalizacji będzie dążył do 0?

Kapitalizacja ciągła

Przykład

Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Ile kapitału będzie na lokacie po roku, jeśli okres kapitalizacji będzie dążył do 0?

- Sformułowanie: „wyrażonej liczbą, nie procentem” oznacza, że zapisuję np. $r = 0,05$, a nie $r = 5\%$.

Kapitalizacja ciągła

Przykład

Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Ile kapitału będzie na lokacie po roku, jeśli okres kapitalizacji będzie dążył do 0?

- Sformułowanie: „wyrażonej liczbą, nie procentem" oznacza, że zapisuję np. $r = 0,05$, a nie $r = 5\%$.
- Okres kapitalizacji zmierzający do zera raczej nie zdarza się na lokatach bankowych, ale w inwestycjach rzeczowych, czy w modelach produkcyjnych jak najbardziej - nazywa się to kapitalizacją ciągłą (np. przyrost lasu, zysk z elektrowni wodnej)

Kapitalizacja ciągła

Przykład

Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Ile kapitału będzie na lokacie po roku, jeśli okres kapitalizacji będzie dążył do 0?

- Sformułowanie: „wyrażonej liczbą, nie procentem" oznacza, że zapisuję np. $r = 0,05$, a nie $r = 5\%$.
- Okres kapitalizacji zmierzający do zera raczej nie zdarza się na lokatach bankowych, ale w inwestycjach rzeczowych, czy w modelach produkcyjnych jak najbardziej - nazywa się to kapitalizacją ciągłą (np. przyrost lasu, zysk z elektrowni wodnej)
- Przy tej samej nominalnej stopie procentowej, im częstsza jest kapitalizacja, tym lepiej dla właściciela lokaty. Dlatego ten przyrost kapitału jest najszybszym możliwym z daną nominalną stopą procentową.

Kapitalizacja ciągła

Przykład

Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Ile kapitału będzie na lokacie po roku, jeśli okres kapitalizacji będzie dążył do 0?

Gdyby w ciągu roku kapitalizacja dokonywała się się x razy, to okresem kapitalizacji jest $\frac{1}{x}$ roku (np. 12 kapitalizacji o okresie miesiąc).

Kapitalizacja ciągła

Przykład

Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Ile kapitału będzie na lokacie po roku, jeśli okres kapitalizacji będzie dążył do 0?

Gdyby w ciągu roku kapitalizacja dokonywała się się x razy, to okresem kapitalizacji jest $\frac{1}{x}$ roku (np. 12 kapitalizacji o okresie miesiąc). W tym okresie stopa procentowa wyniesie $\frac{r}{x}$.

Kapitalizacja ciągła

Przykład

Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Ile kapitału będzie na lokacie po roku, jeśli okres kapitalizacji będzie dążył do 0?

Gdyby w ciągu roku kapitalizacja dokonywała się się x razy, to okresem kapitalizacji jest $\frac{1}{x}$ roku (np. 12 kapitalizacji o okresie miesiąc). W tym okresie stopa procentowa wyniesie $\frac{r}{x}$. Zatem w każdym okresie kapitalizacji kapitał przemnażamy przez $(1 + \frac{r}{x})$

Kapitalizacja ciągła

Przykład

Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Ile kapitału będzie na lokacie po roku, jeśli okres kapitalizacji będzie dążył do 0?

Gdyby w ciągu roku kapitalizacja dokonywała się się x razy, to okresem kapitalizacji jest $\frac{1}{x}$ roku (np. 12 kapitalizacji o okresie miesiąc). W tym okresie stopa procentowa wyniesie $\frac{r}{x}$. Zatem w każdym okresie kapitalizacji kapitał przemnażamy przez $(1 + \frac{r}{x})$. Po roku na koncie powinno wtedy być $K(1 + \frac{r}{x})^x$.

Kapitalizacja ciągła

Przykład

Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Ile kapitału będzie na lokacie po roku, jeśli okres kapitalizacji będzie dążył do 0?

Gdyby w ciągu roku kapitalizacja dokonywała się się x razy, to okresem kapitalizacji jest $\frac{1}{x}$ roku (np. 12 kapitalizacji o okresie miesiąc). W tym okresie stopa procentowa wyniesie $\frac{r}{x}$. Zatem w każdym okresie kapitalizacji kapitał przemnażamy przez $(1+\frac{r}{x})$. Po roku na koncie powinno wtedy być $K(1+\frac{r}{x})^x$. Pytanie brzmi, co się dzieje, gdy x zmierza do nieskończoności (czyli $\frac{1}{x}$ zmierza do zera)?

Kapitalizacja ciągła

Przykład

Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Ile kapitału będzie na lokacie po roku, jeśli okres kapitalizacji będzie dążył do 0?

Zatem musimy obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} K(1+\frac{r}{x})^x = K\cdot[1^\infty] = ?$$

Kapitalizacja ciągła

Przykład

Rozważmy sytuację kapitału K ulokowanego na lokacie o rocznej stopie procentowej r (wyrażonej liczbą, nie procentem). Ile kapitału będzie na lokacie po roku, jeśli okres kapitalizacji będzie dążył do 0?

Zatem musimy obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} K(1+\frac{r}{x})^x = K\cdot[1^\infty] = ?$$

Jak widać, otrzymujemy symbol nieoznaczony, wymagający dodatkowych obliczeń przed podaniem wyniku.

Twierdzenie o symbolu $[1^\infty]$

Twierdzenie o symbolu $[1^\infty]$

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, to $\lim\limits_{x \to x_0} (1 + \frac{1}{f(x)})^{f(x)} = e$ (stała Eulera). W szczególności $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

Twierdzenie o symbolu $[1^\infty]$

Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)} = e$ (stała Eulera). W szczególności $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Wniosek - rozwiązanie przykładu

$$\lim_{x\to\infty} K(1+\frac{r}{x})^x = Ke^r.$$

Twierdzenie o symbolu $[1^\infty]$

Twierdzenie o symbolu $[1^\infty]$

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, to $\lim\limits_{x \to x_0} (1 + \frac{1}{f(x)})^{f(x)} = e$ (stała Eulera). W szczególności $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

Wniosek - rozwiązanie przykładu

$$\lim_{x \to \infty} K(1 + \frac{r}{x})^x = Ke^r.$$

Dowód:

$$\lim_{x \to \infty} K(1 + \frac{r}{x})^x = K \cdot [1^\infty] =$$

Twierdzenie o symbolu $[1^\infty]$

Twierdzenie o symbolu $[1^\infty]$

Jeśli $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, to $\lim_{x\to x_0}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)} = e$ (stała Eulera). W szczególności $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Wniosek - rozwiązanie przykładu

$$\lim_{x\to\infty} K(1+\frac{r}{x})^x = Ke^r.$$

Dowód:

$$\lim_{x\to\infty} K(1+\frac{r}{x})^x = K\cdot[1^\infty] = \lim_{x\to\infty} K((1+\frac{r}{x})^{\frac{x}{r}})^r$$

Twierdzenie o symbolu $[1^\infty]$

Twierdzenie o symbolu $[1^\infty]$

Jeśli $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, to $\lim_{x\to x_0} (1 + \frac{1}{f(x)})^{f(x)} = e$ (stała Eulera). W szczególności $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

Wniosek - rozwiązanie przykładu

$$\lim_{x\to\infty} K(1 + \frac{r}{x})^x = Ke^r.$$

Dowód:

$$\lim_{x\to\infty} K(1 + \frac{r}{x})^x = K \cdot [1^\infty] = \lim_{x\to\infty} K((1 + \frac{r}{x})^{\frac{x}{r}})^r = Ke^r.$$

Symbol $[1^\infty]$ - algorytm działania

Mechanizm postępowania z granicami typu $[1^\infty]$:
I. Najpierw skoncentrujmy się na podstawie potęgi (która w granicy w x_0 daje nam 1).

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x}\right)^{-x+1} = [1^{-\infty}] =$$

Symbol $[1^\infty]$ - algorytm działania

Mechanizm postępowania z granicami typu $[1^\infty]$:
I. Najpierw skoncentrujmy się na podstawie potęgi (która w granicy w x_0 daje nam 1). Rozbijamy ją na $1 + \textit{reszta}$, gdzie *reszta* dąży do 0 w x_0 (jako, że całość dąży do 1, na pewno da się to uczynić).

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x}\right)^{-x+1} = [1^{-\infty}] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{-x+1} =$$

Symbol $[1^\infty]$ - algorytm działania

Mechanizm postępowania z granicami typu $[1^\infty]$:
I. Najpierw skoncentrujmy się na podstawie potęgi (która w granicy w x_0 daje nam 1). Rozbijamy ją na $1 + \textit{reszta}$, gdzie *reszta* dąży do 0 w x_0 (jako, że całość dąży do 1, na pewno da się to uczynić). Na *reszta* można patrzeć jako na $\frac{1}{\textit{innareszta}}$ i teraz *innareszta* spełnia założenie o $f(x)$ w ostatnim twierdzeniu.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x}\right)^{-x+1} = [1^{-\infty}] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{-x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x}{2}}\right)^{-x+1} =$$

Symbol $[1^\infty]$ - algorytm działania

Mechanizm postępowania z granicami typu $[1^\infty]$:
II. Mamy już odpowiednią do twierdzenia postać podstawy potęgi: $(1+\frac{1}{innareszta})$. Teraz, by skorzystać z twierdzenia, musimy sprawić, by *innareszta* pojawiła się w wykładniku.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{3x}{2}})^{-x+1} =$$

Symbol $[1^{\infty}]$ - algorytm działania

Mechanizm postępowania z granicami typu $[1^{\infty}]$:
II. Mamy już odpowiednią do twierdzenia postać podstawy potęgi: $(1+\frac{1}{innareszta})$. Teraz, by skorzystać z twierdzenia, musimy sprawić, by *innareszta* pojawiła się w wykładniku. W tym celu korzystamy ze wzoru: $a^b=(a^c)^{\frac{b}{c}}$. W roli a występuje nasza podstawa, w roli b - wykładnik, który mamy na początku, w roli c - *innareszta*.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{3x}{2}})^{-x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}((1+\frac{1}{\frac{3x}{2}})^{\frac{3x}{2}})^{\frac{2}{3x}\cdot(-x+1)}=$$

Symbol $[1^\infty]$ - algorytm działania

Mechanizm postępowania z granicami typu $[1^\infty]$:
III. Mamy teraz postać $((1+\frac{1}{innareszta})^{innareszta})^{\frac{starywykladnik}{innareszta}}$.

$$\lim_{x\to\infty}((1+\frac{1}{\frac{3x}{2}})^{\frac{3x}{2}})^{\frac{2}{3x}\cdot(-x+1)} =$$

Symbol $[1^\infty]$ - algorytm działania

Mechanizm postępowania z granicami typu $[1^\infty]$:
III. Mamy teraz postać $((1+\frac{1}{innareszta})^{innareszta})^{\frac{starywykladnik}{innareszta}}$.
Z twierdzenia wiemy, że $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0}((1+\frac{1}{innareszta})^{innareszta}) = e$, więc, zgodnie z twierdzeniem o granicy złożenia (punkt II), wystarczy, że zajmę się obliczeniem $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{starywykladnik}{innareszta}$, a wynikiem końcowym będzie $e^{\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{starywykladnik}{innareszta}}$.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty}((1+\frac{1}{\frac{3x}{2}})^{\frac{3x}{2}})^{\frac{2}{3x}\cdot(-x+1)} =$$

$$= \lim_{x \longrightarrow \infty}((1+\frac{1}{\frac{3x}{2}})^{\frac{3x}{2}})^{\frac{-2x+2}{3x}} =$$

Symbol $[1^\infty]$ - algorytm działania

Mechanizm postępowania z granicami typu $[1^\infty]$:
III. Mamy teraz postać $\left(\left(1+\frac{1}{innareszta}\right)^{innareszta}\right)^{\frac{starywykladnik}{innareszta}}$.
Z twierdzenia wiemy, że $\lim_{x\longrightarrow x_0}\left(\left(1+\frac{1}{innareszta}\right)^{innareszta}\right)=e$, więc, zgodnie z twierdzeniem o granicy złożenia (punkt II), wystarczy, że zajmę się obliczeniem $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{starywykladnik}{innareszta}$, a wynikiem końcowym będzie $e^{\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{starywykladnik}{innareszta}}$.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{2}{3x}\cdot(-x+1)}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{-2x+2}{3x}}=$$

$$=e^{\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x+2}{3x}}=$$

Symbol $[1^\infty]$ - algorytm działania

Mechanizm postępowania z granicami typu $[1^\infty]$:
III. Mamy teraz postać $\left(\left(1+\frac{1}{innareszta}\right)^{innareszta}\right)^{\frac{starywykladnik}{innareszta}}$.
Z twierdzenia wiemy, że $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\left(1+\frac{1}{innareszta}\right)^{innareszta}\right)=e$, więc, zgodnie z twierdzeniem o granicy złożenia (punkt II), wystarczy, że zajmę się obliczeniem $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{starywykladnik}{innareszta}$, a wynikiem końcowym będzie $e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{starywykladnik}{innareszta}}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{2}{3x}\cdot(-x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{-2x+2}{3x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x+2}{3x}}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

Symbol $[1^\infty]$ - uwaga!

Pamiętajmy, że powyższy algorytm działa tylko dla symbolu $[1^\infty]$!

Symbol $[1^\infty]$ - uwaga!

Pamiętajmy, że powyższy algorytm działa tylko dla symbolu $[1^\infty]$! W szczególności, nie wolno robić tak:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{3x})^{-2} = \lim_{x\to\infty}(\frac{3x-2x+2}{3x})^{-2} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{-2x+2}{3x})^{-2} =$$

$$\lim_{x\to\infty}((1+\frac{-2x+2}{3x})^{\frac{3x}{-2x+2}})^{\frac{-2x+2}{3x}\cdot(-2)} = e^{\frac{4}{3}},$$

bo założenia twierdzenia nie są spełnione (to nie granica typu $[1^\infty]$).

Symbol $[1^\infty]$ - uwaga!

Pamiętajmy, że powyższy algorytm działa tylko dla symbolu $[1^\infty]$! W szczególności, nie wolno robić tak:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{3x})^{-2} = \lim_{x\to\infty}(\frac{3x-2x+2}{3x})^{-2} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{-2x+2}{3x})^{-2} =$$

$$\lim_{x\to\infty}((1+\frac{-2x+2}{3x})^{\frac{3x}{-2x+2}})^{\frac{-2x+2}{3x}\cdot(-2)} = e^{\frac{4}{3}},$$

bo założenia twierdzenia nie są spełnione (to nie granica typu $[1^\infty]$). Poprawnie:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{3x})^{-2} = (\frac{1}{3})^{-2} = 9.$$

Twierdzenie o trzech funkcjach

W niektórych sytuacjach przydaje się twierdzenie o trzech funkcjach (zwane też twierdzeniem o policjantach i złodzieju lub twierdzeniem o trzech imprezowiczach).

Twierdzenie o trzech funkcjach

Jeśli w otoczeniu x_0 zachodzi nierówność $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, to $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} h(x) \leqslant \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x)$ (o ile granice te istnieją). W szczególności, jeśli $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} h(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = y$, to $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = y$.

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1} + 4^x + 5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] =?.$

Zauważmy, że

$$\sqrt[x]{5^{x-1}} \leqslant \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} \leqslant \sqrt[x]{5^{x+1}+5^x+5^{x-1}}.$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$

Zauważmy, że

$$\sqrt[x]{5^{x-1}} \leqslant \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} \leqslant \sqrt[x]{5^{x+1}+5^x+5^{x-1}}.$$

Lewa nierówność zachodzi, gdyż by uzyskać lewą stronę odjęliśmy od wyjściowego wyrażenia dwa dodatnie składniki.

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1} + 4^x + 5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

Zauważmy, że

$$\sqrt[x]{5^{x-1}} \leqslant \sqrt[x]{3^{x+1} + 4^x + 5^{x-1}} \leqslant \sqrt[x]{5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1}}.$$

Lewa nierówność zachodzi, gdyż by uzyskać lewą stronę odjęliśmy od wyjściowego wyrażenia dwa dodatnie składniki.
Prawa nierówność zachodzi, gdyż $3 < 5$ i $4 < 5$, więc zastąpienie 4 i 3 piątkami mogło tylko zwiększyć sumę pod pierwiastkiem.

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}}$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \sqrt[x]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x}$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1} + 4^x + 5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x} = \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{5})^{\frac{1}{x}} \cdot 5$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x} = \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{5})^{\frac{1}{x}} \cdot 5 = (\frac{1}{5})^0 \cdot 5$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x} = \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{5})^{\frac{1}{x}} \cdot 5 = (\frac{1}{5})^0 \cdot 5 = 5.$$

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x+1}+5^x+5^{x-1}}$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x} = \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{5})^{\frac{1}{x}} \cdot 5 = (\frac{1}{5})^0 \cdot 5 = 5.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x+1}+5^x+5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5\cdot 5^x + 5^x + \frac{1}{5}5^x}$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x} = \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{5})^{\frac{1}{x}} \cdot 5 = (\frac{1}{5})^0 \cdot 5 = 5.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x+1}+5^x+5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5\cdot 5^x+5^x+\frac{1}{5}5^x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{6\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x}$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x} = \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{5})^{\frac{1}{x}} \cdot 5 = (\frac{1}{5})^0 \cdot 5 = 5.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x+1}+5^x+5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5\cdot 5^x + 5^x + \frac{1}{5}5^x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{6\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[x]{5^x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} (6\frac{1}{5})^{\frac{1}{x}} \cdot 5$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x} = \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{5})^{\frac{1}{x}} \cdot 5 = (\frac{1}{5})^0 \cdot 5 = 5.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x+1}+5^x+5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5\cdot 5^x+5^x+\frac{1}{5}5^x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{6\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} (6\frac{1}{5})^{\frac{1}{x}} \cdot 5 = (6\frac{1}{5})^0 \cdot 5$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x} = \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{5})^{\frac{1}{x}} \cdot 5 = (\frac{1}{5})^0 \cdot 5 = 5.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x+1}+5^x+5^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5\cdot 5^x + 5^x + \frac{1}{5}5^x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{6\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[x]{5^x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} (6\frac{1}{5})^{\frac{1}{x}} \cdot 5 = (6\frac{1}{5})^0 \cdot 5 = 5.$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$$

Z twierdzenia:

$$5 = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}} \leqslant \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x+1}+5^x+5^{x-1}} = 5.$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład

Przykład

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = [\infty^0] = ?.$

Z twierdzenia:

$$5 = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x-1}} \leqslant \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^{x+1}+5^x+5^{x-1}} = 5.$$

Zatem:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^{x+1}+4^x+5^{x-1}} = 5.$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład 2

Przykład

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład 2

Przykład

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$.

Zauważmy, że

$$\frac{-1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład 2

Przykład

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$.

Zauważmy, że

$$\frac{-1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Wynika to z faktu, że $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Twierdzenie o trzech funkcjach - przykład 2

Przykład

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$.

Zauważmy, że

$$\frac{-1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Wynika to z faktu, że $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
Jako, że $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, to

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$