Poniżej mogą Państwo znaleźć skondensowane wiadomości z wykładu. Należy je traktować jako przegląd pojęć, które pojawiły się na wykładzie. Materiały te nie są w pełni tożsame z tym co pojawia się na wykładzie. Tzn. na wykładzie zazwyczaj pojawiać się będzie wiele przykładów, które pozwolą Państwu (mam nadzieję) lepiej zrozumieć i opanować materiał. W poniższych materiałach skupimy się głównie na definicjach i twierdzeniach pojawiających się na wykładach, które muszą Państwo opanować. Często też w materiałach (w ramach kursu z algebry liniowej) definicje, twierdzenia czy metody będą formułowane w pełnej ogólności, (najczęściej w $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^m$) a na wykładzie dokładniej będziemy omawiali przypadek $m, n = 2, 3$.

Istotne pojęcia: twierdzenie, definicja, dowód, przykład, kontrprzykład, podstawowe tautologie, podstawowe obiekty: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}$, iloczyn skalarny i norma w $\mathbb{R}^n$, prostopadłość wektorów w $\mathbb{R}^n$.

1 Podstawowe oznaczenia

oznaczenie	co oznacza	uwagi
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	zbiór liczb naturalnych	dobrze określone („dozwolone”) działania: dodawanie i mnożenie (suma i iloczyn liczb naturalnych jest liczbą naturalną); przynależność zera do zbioru liczb naturalnych jest kwestią umowy, my mówiąc o liczbach naturalnych będziemy mieli na myśli całkowite liczby dodatnie
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych	dobrze określone działania — jak w $\mathbb{N}$, ponadto: odejmowanie (różnica liczb całkowitych jest liczbą całkowitą)
$\mathbb{Q}$	zbiór liczb wymiernych	dobrze określone działania — jak w $\mathbb{Z}$, ponadto: dzielenie,
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych	dobrze określone działania — jak w $\mathbb{Q}$, ponadto: pierwiastki liczb dodatnich (przemnożonych przez ± 1); naturalna interpretacja graficzna – prosta rzeczywista
$\mathbb{C}$	zbiór liczb zespolonych	rozszerzamy $\mathbb{R}$ o pierwiastkowanie liczb ujemnych, elementy $\mathbb{C}$ leżą na tzw. płaszczyźnie zespolonej
$\in$	*należy*	np. $x \in \mathbb{R}$
$\subset$	*zawiera się*	np. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
$\forall$	*dla każdego*	np. $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 \geqslant 0$ (równoważnie używa się też zapisu $\forall_{x \in \mathbb{R}}$)
$\exists$	*istnieje*	np. $\exists n \in \mathbb{N}\colon 3n < 20$

Dodatkowo używać będziemy oznaczeń $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ oraz $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

2 Kluczowe tautologie

Z rachunku zdań warto zapamiętać następujące tautologie (zdania prawdziwe bez względu na wartość logiczną zdań składowych)

1. Reguła zaprzeczania implikacji

$$\neg(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow p \wedge (\neg q) \quad [(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p) \vee q]$$

2. Reguła kotrapozycji (*modus tollendo tollens*)

$$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$$

3. Prawa de Morgana:

$$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$$

Reguła zaprzeczania implikacji jest podstawą wnioskowania matematycznego (logicznego). Posłuży nam ona wielokrotnie aby pokazać, że pewne hipotezy nie są prawdziwe. Można ją odczytać następująco: aby pokazać, że z p nie wynika q wystarczy pokazać, że p zachodzi (jest to zdanie logiczne prawdziwe), podczas gdy q nie (jest fałszywe).

Reguła kontrapozycji pozwala z kolei na dowodzenie twierdzeń tzw. metodą niewprost: zamiast dowodzić implikacji $p \Rightarrow q$ można pokazać, że jeśli q nie jest prawdziwe, to p również musi być fałszywe.

Prawa de Morgana będą kluczowe w kontekście dowodzenia własności, gdzie występują kwantyfikatory.

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów. Te prawa dotyczą sytuacji gdy chcemy zaprzeczyć zdaniu, w którym występują kwantyfikatory.

Prawo de Morgana dla kwantyfikatora ogólnego ma postać:

$$\boxed{\neg(\forall x \;\; p(x)) \iff \exists x \;\; \neg p(x)}$$

Aby pokazać, że zdanie *„$p(x)$ zachodzi dla dowolnego x”* nie jest prawdziwe wystarczy znaleźć 1. element x, dla którego $p(x)$ nie jest spełnione. Na przykład, jeśli forma zdaniowa (czyli, dla przypomnienia, formuła, która po np. dołączeniu kwantyfikatora staje się zdaniem logicznym) $p(x)$ ma postać $x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$, to na podstawie prawa de Morgana mamy

$$\neg\Big(\forall x \in \mathbb{R}: \quad (x^2 > 0 \Rightarrow x > 0)\Big) \iff \exists x \in \mathbb{R}: \quad \neg(x^2 > 0 \Rightarrow x > 0) \iff \exists x \in \mathbb{R}: \quad x^2 > 0 \wedge x \leqslant 0.$$

Odczytując ostatnie stwierdzenie, zdanie którego wartość logiczną musimy określić ma postać: *Istnieje taka liczba rzeczywista, której kwadrat jest większy od zera oraz ona sama jest niedodatnia* (Określenie prawdziwości tego zdania pozostawiam Państwu).

Drugie prawo — *prawo de Morgana dla małego (szczegółowego) kwantyfikatora* ma postać:

$$\boxed{\neg(\exists x \;\; p(x)) \iff \forall x \;\; \neg p(x)}$$

Stąd zdanie *„nieprawda, że istnieje x takie, że $p(x)$ zachodzi”* jest równoważne stwierdzeniu, że *dla dowolnego x (z odpowiedniego zbioru) nieprawdziwe jest zdanie $p(x)$*. Dla przykładu

$$\neg\left(\exists n \in \mathbb{N}: \; n^2 = \frac{1}{4}\right) \iff \forall n \in \mathbb{N}: \quad \neg(n^2 = 1/4) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \quad n^2 \neq \frac{1}{4}.$$

Warto również pamiętać o tym, że kolejność zapisu kwantyfikatorów w zdaniu jest istotna. Oczywiście gdy mamy dwa takie same kwantyfikatory po sobie ($\exists x \exists y \; p(x,y)$ czy $\forall x \forall y \; p(x,y)$) nie ma znaczenia ich kolejność. Inaczej jest gdy w jednym zdaniu znajdują się różne kwantyfikatory. Czym innym jest $\forall x \; \exists y \; p(x,y)$ a czym innym $\exists y \; \forall x \; p(x,y)$ Dokładniej w pierwszym przypadku dla ustalonego x ma istnieć y takie, że $p(x,y)$ jest prawdziwe, natomiast w drugim przypadku (gdy $\exists y \forall x \; p(x,y)$) można wybrać y takie, że przy dowolnym wyborze x zdanie $p(x,y)$ jest prawdziwe. Oczywiście widzimy, że jeśli istnieje y dobry dla każdego x, to dla każdego x istnieje y, przynajmniej ten, który jest dobry dla każdego x. Zatem

$$\exists y \forall x \; p(x,y) \;\; \Rightarrow \;\; \forall x \exists y \; p(x,y),$$

ale implikacja w przeciwną stronę nie zachodzi. Naturalny kontrprzykład na wynikanie w przeciwną stronę jest następujący: dla dowolnego studenta istnieje nr indeksu mu przypisany, ale nie istnieje numer, który jest numerem indeksu każdego studenta. Stąd <u>nie wolno</u> nam bezkarnie zamieniać w zdaniu kolejności różnych kwantyfikatorów.

3 Twierdzenie, dowód, przykład, kontrprzykład

Twierdzenia to pewne ogólnie prawdziwe stwierdzenia wynikające z reguł wnioskowania. Poprzednik implikacji to *założenia* twierdzenia, natomiast następnik to jego *teza*. Twierdzenie mówi, że przy spełnieniu pewnych warunków — naszych założeń, zachodzi pewna teza. Możemy wtedy powiedzieć, że założenia są **warunkiem wystarczającym** dla tezy twierdzenia, a teza jest **warunkiem koniecznym** dla prawdziwości założeń. Aby uzasadnić prawdziwość takiego stwierdzenia zazwyczaj powinniśmy przeprowadzić *dowód.* Jest to logiczne rozumowanie, które przeprowadza się na podstawie założeń twierdzenia i które prowadzi do jego tezy. Spróbujmy udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Niech $x \in \mathbb{R}$. Jeśli x jest większa od zera, to x^2 jest większa od zera. (Używając formalnej notacji: $\forall x \in \mathbb{R}: \ (x > 0 \Rightarrow x^2 > 0)$).

Dowód. Ponieważ implikacja, którą chcemy pokazać ma zachodzić dla dowolnej liczby rzeczywistej, musimy pokazać wynikanie dla dowolnej liczby rzeczywistej.[1] Bez straty ogólności można założyć, że $x > 0$ (jeśli $x \leqslant 0$, to zdanie jest prawdziwe, bo poprzednik implikacji jest fałszywy). Weźmy $x > 0$. Wtedy $x^2 = x \cdot x > 0$, ponieważ iloczyn dwóch liczb dodatnich jest dodatni. Pokazaliśmy zatem, że jeśli weźmiemy jakąkolwiek liczbę większą od zera, to jej kwadrat też będzie większy od zera. Ze względu na dowolność x pokazaliśmy prawdziwość tezy, co kończy dowód.

Aby wykazać, że pewne twierdzenie jest fałszywe wystarczy pokazać, że zachodzi poprzednik implikacji (czyli spełnione są założenia twierdzenia), ale nie jest spełniony następnik, czyli teza twierdzenia (reguła zaprzeczania implikacji ma postać: $p \Rightarrow q \iff p \wedge \neg q$). W takim przypadku często przydaje się kontrprzykład — znowu na bazie prawa de Morgana aby zanegować twierdzenie $\forall x \; p(x)$ wystarczy tylko jeden argument x taki, że $\neg p(x)$. Oznacza to, że jeśli wskażemy jeden argument x, dla którego teza twierdzenia nie zachodzi, to twierdzenie nie jest prawdziwe.

Sformułujmy następującą hipotezę (zdanie, które stwierdza spodziewaną relację między jakimiś zjawiskami): *Jeśli kwadrat liczby jest dodatni, to jest ona większa od zera. (w zapisie symbolicznym: $\forall x \in \mathbb{R}: (x^2 > 0 \Rightarrow x > 0)$).* Wiemy, że ta hipoteza nie jest prawdziwa. Jak to pokazać? Wystarczy wskazać jeden element $x \in \mathbb{R}$, dla którego ono nie zachodzi i wtedy obalimy tę hipotezę (wskażemy kontrprzykład)[2]. Weźmy $x = -1$. Wtedy $x^2 = (-1)^2 = 1 > 0$, ale $x = -1 < 0$. Założenia twierdzenia są spełnione ale teza nie. Stąd twierdzenie nie zachodzi, a kontrprzykładem dla tego twierdzenia jest $x = -1$. Inny naturalny przykład hipotezy jest następujący: Dowolna liczba naturalna jest mniejsza od tysiąca. Oczywiście, jeśli weźmiemy $x = 1, 2, 3, \ldots, 999$, to $x < 1000$, ale wystarczy wziąć jakąkolwiek liczbę naturalną większą bądź równą od tysiąca aby pokazać, że ta hipoteza nie jest prawdziwa.

4 Rachunek zbiorów

Niech $X \neq \emptyset$. Wtedy

$A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$	*A zawiera się w B*
$A \cup B = \{x \in X : \ x \in A \vee x \in B\}$	*suma zbiorów A i B*
$A \cap B = \{x \in X : \ x \in A \wedge x \in B\}$	*iloczyn (przecięcie) zbiorów A i B*
$A \setminus B = \{x \in X : \ x \in A \ \wedge \neg x \in B\}$	*różnica zbiorów A i B*
$A^c = X \setminus A = \{x : \ x \in X \ \wedge \neg x \in A\}$	*dopełnienie zbioru A*
$\mathcal{P}(A) = \{D : \ D \subset A\}$	*zbiór potęgowy (zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A)*

Zauważmy, że mamy następujący ciąg zawierań

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

[1] Przykład (zbadanie np. przypadku gdy $x = 1$ i stwierdzenie, że $x = 1 > 0$ i $x^2 = 1 > 0$) nie uzasadnia prawdziwości twierdzenia (twierdzenie mówi nam, że implikacja ta zachodzi dla dowolnej wartości x. Przypisując do zmiennej x wartość $x = 1$ możemy pokazać, że dla tej jednej wartości zmiennej x twierdzenie zachodzi, nie mówi nam to nic o pozostałych przypadkach, a wiemy, że na podstawie prawa de Morgana dla „dużego" kwantyfikatora, aby ta implikacja nie była prawdziwa wystarczyłaby jedna liczba rzeczywista dodatnia, której kwadrat nie jest większy od zera).

[2] Na podstawie prawa de Morgana dla kwantyfikatora ogólnego oraz reguły zaprzeczania implikacji:

$$\neg \left(\forall x \in \mathbb{R} : \ (x^2 > 0 \Rightarrow x > 0)\right) \quad \left(\exists x \in \mathbb{R} : \ x^2 > 0 \vee x \leqslant 0)\right).$$

Ponadto mamy następujące zależności:

	Własności	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	$(A^c)^c = A$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	$(\varnothing)^c = X$
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \subset B \Longrightarrow B^c \subset A^c$
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$	
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	

Definicja 1. *Niech $A \subset X$, $B \subset Y$. Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór*

$$A \times B = \{(x, y) : \ x \in A \wedge y \in B\}.$$

Przykłady: układ współrzędnych $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, wykres funkcji $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 = \log_2 x_1\}$, $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 1, x_3 \in \mathbb{N}, x_4^2 = 1\}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \{0, 1\}$, $\{(\mathrm{x}_1, x_2, x_3) : \log_{16}(\frac{x_1+2}{x_1+5}) > 256, \ (\frac{3}{4})^{x_2^2 - 2} \leqslant 1, \ x_3^{10} = 1\}$, zbiór koszyków dóbr $\{(x_1, x_2) : \ x_1, x_2 \geqslant 0\}$.

Własności iloczynu kartezjańskiego
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
$A \times B = B \times A \Longleftrightarrow A = B$
$(X \times Y) \setminus (A \times B) = [(X \setminus A) \times Y] \cup [X \times (Y \setminus B)]$

5 Przestrzeń $\mathbb{R}^n$

Niech $n \in \mathbb{N}$. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ to nic innego jak iloczyn kartezjański $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ razy}}$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Dla $n = 1$ otrzymujemy prostą rzeczywistą, dla $n = 2$ — płaszczyznę itd. Elementy przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywać będziemy *wektorami* (Algebra) lub *punktami* (Analiza). Wektory $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ zapisywać będziemy też w równoważnej postaci (tzw. postaci kolumnowej):

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Operacje w $\mathbb{R}^n$. Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy definiujemy

- dodawanie wektorów jako

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix},$$

- mnożenie wektora przez skalar jako

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

Czwórkę $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ nazywamy przestrzenią wektorową. Elementy $x \in \mathbb{R}^n$ są *wektorami*, zaś $\alpha \in \mathbb{R}$ — *skalarami.*

Definicja 2. *(Kanonicznym) Iloczynem skalarnym nazywamy odwzorowanie* $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *zadane wzorem*

$$\langle x, y \rangle = \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

dla $x, y \in \mathbb{R}^n$*.*

Często używa się też innych oznaczeń: $\langle x, y \rangle = x \circ y = x \cdot y = u(x, y)$. Warto też zapamiętać inną formę zapisu, która przyda się nam na algebrze (tzw. postać macierzowa):

$$\langle x, y \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

Mając pojęcie iloczynu skalarnego możemy wprowadzić pojęcie odległości punktu (wektora) od początku układu współrzędnych (normy wektora) oraz prostopadłości dwóch wektorów.

Definicja 3. Normą *wektora* $x \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Norma wektora jest poprawnie zdefiniowana ze względu na pkt 5. poniższego twierdzenia

Twierdzenie 1 (Własności iloczynu skalarnego)**.** *Dla dowolnych wektorów* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *zachodzą następujące zależności:*

1. $\langle x, y \rangle = ||x|| \cdot ||y|| \cos(\angle(x, y))$,
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ *dla* $\alpha \in \mathbb{R}$,
5. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$.

Geometryczna interpretacja iloczynu skalarnego jest zatem prosta. Dla wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$ zachodzi zależność $||x|| \cdot ||y|| \cos \alpha$ gdzie α jest miarą kąta między nimi (ponieważ cos jest funkcją parzystą nie ma znaczenia w którą stronę ten kąt jest mierzony). Najczęściej używa się tej zależności do badania prosotopadłości wektorów. Zresztą sam iloczyn skalarny pozwala nam wprowadzić pojęcie prostopadłości wektorów w $\mathbb{R}^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

Definicja 4. *Mówimy, że wektory* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *są* **prostopadłe** *(oznaczamy to pisząc* $x \perp y$*) wtedy i tylko wtedy, gdy* $\langle v, w \rangle = 0$*.*

Iloczyn skalarny wykorzystamy w przyszłości wprowadzając mnożenie macierzy, jak również gdy zajmować się będziemy wektorami własnymi macierzy, znajdzie też w przyszłości zastosowanie na kursie ekonometrii (np. przy algebraicznej metodzie namniejszych kwadratów). Na razie warto nadmienić jeszcze jego najprostszą ekonomiczną interpetację: wartość koszyka dóbr. Załóżmy, że pewien gracz rynkowy posiada następujące zasoby: x_1 jednostek dobra 1, x_2 jednostek dobra 2 itd. (liczby te mogą być ujemne, gdyż uwzględniamy możliwe zadłużenie). Ceny tych dóbr to: y_1 za jednostkę dobra 1, y_2 za jednostkę dobra 2 itd. (ceny mogą być ujemne, jeśli dobro jest niepożądane np. odpady produkcyjne) Wtedy wartość wszystkich zasobów gracza rynkowego (jego koszyka dóbr) wynosi $\langle x, y \rangle$.