# 15a. Analiza zmiennych dyskretnych: szeregi potęgowe

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

# Wstęp - zmienne ciągłe i dyskretne

W poprzednim rozdziale zobaczyliśmy, w jaki sposób funkcje określone na zmiennach ciągłych (funkcje rzeczywiste) pomagają nam zrozumieć funkcje zmiennych dyskretnych (ciągi i szeregi) np. dzięki twierdzeniu Heinego, czy też kryterium całkowemu. W tej części wyjaśnimy, w jaki sposób ciągi, a zwłaszcza szeregi mogą pomóc w zrozumieniu zależności zadanych na przedziałach w $\mathbb{R}$.

# Przykład

Zauważmy, że klasyczny zapis funkcyjny i zapis szeregowy mogą oznaczać jedno i to samo.

# Przykład

Zauważmy, że klasyczny zapis funkcyjny i zapis szeregowy mogą oznaczać jedno i to samo.

## Przykład

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $x^2$ zbieżnym dla $x$ z przedziału

# Przykład

Zauważmy, że klasyczny zapis funkcyjny i zapis szeregowy mogą oznaczać jedno i to samo.

## Przykład

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $x^2$ zbieżnym dla $x$ z przedziału $(-1, 1)$ i, zgodnie ze wzorem na sumę szeregu geometrycznego

# Przykład

Zauważmy, że klasyczny zapis funkcyjny i zapis szeregowy mogą oznaczać jedno i to samo.

## Przykład

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $x^2$ zbieżnym dla $x$ z przedziału $(-1, 1)$ i, zgodnie ze wzorem na sumę szeregu geometrycznego $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$.

# Przykład

Zauważmy, że klasyczny zapis funkcyjny i zapis szeregowy mogą oznaczać jedno i to samo.

## Przykład

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $x^2$ zbieżnym dla $x$ z przedziału $(-1, 1)$ i, zgodnie ze wzorem na sumę szeregu geometrycznego $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$.

Dlatego, jeśli $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ i $D_f = (-1, 1)$ to równie dobrze możemy wzór tej funkcji zapisać jako $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$.

# Przykład

Zauważmy, że klasyczny zapis funkcyjny i zapis szeregowy mogą oznaczać jedno i to samo.

## Przykład

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $x^2$ zbieżnym dla $x$ z przedziału $(-1, 1)$ i, zgodnie ze wzorem na sumę szeregu geometrycznego $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$.

Dlatego, jeśli $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ i $D_f = (-1, 1)$ to równie dobrze możemy wzór tej funkcji zapisać jako $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$. Taki zapis może być bardzo pożyteczny: łatwo zauważyć, że dla dużych $n$ kolejne wyrazy ciągu $x^{2n}$ są coraz bliższe zeru, więc jeśli wystarczy nam rezultat przybliżony, to możemy przeliczyć tylko kilka pierwszych wyrazów:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{k} x^{2n}.$$

# Przykład

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{k} x^{2n}.$$

Z kolei ta postać jest bardzo wygodna do prowadzenia wszelkich obliczeń, gdyż jest to po prostu wielomian, a na wielomianach bardzo łatwo wykonuje się wszystkie możliwe operacje, w tym różniczkowanie i całkowanie.

# Przykład

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{k} x^{2n}.$$

Z kolei ta postać jest bardzo wygodna do prowadzenia wszelkich obliczeń, gdyż jest to po prostu wielomian, a na wielomianach bardzo łatwo wykonuje się wszystkie możliwe operacje, w tym różniczkowanie i całkowanie. Akurat w tym przykładzie funkcja wyjściowa $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ nie jest na tyle skomplikowana, żeby przejście na wielomian znacząco upraszczało nam pracę, ale gdyby przedstawienie w takiej postaci dowolnie skomplikowanej funkcji byłoby możliwe, życie (matematyczne) mogłoby się stać o wiele prostsze.

# Przykład

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{k} x^{2n}.$$

Z kolei ta postać jest bardzo wygodna do prowadzenia wszelkich obliczeń, gdyż jest to po prostu wielomian, a na wielomianach bardzo łatwo wykonuje się wszystkie możliwe operacje, w tym różniczkowanie i całkowanie. Akurat w tym przykładzie funkcja wyjściowa $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ nie jest na tyle skomplikowana, żeby przejście na wielomian znacząco upraszczało nam pracę, ale gdyby przedstawienie w takiej postaci dowolnie skomplikowanej funkcji byłoby możliwe, życie (matematyczne) mogłoby się stać o wiele prostsze. Czy, kiedy i jak się to da zrobić przekonamy się w ramach tego wykładu.

# Szereg potęgowy - definicja

Naszym celem będzie zapisanie wzorów funkcji, jako szeregów „z parametrem”, którym jest zmienna $x \in D_f$. Jako, że chcemy, by w rezultacie badać wielomiany (a raczej pewne ich uogólnienia zezwalające na nieskończenie wiele składników jednomianowych), przedmiotem naszego zainteresowanie będą przede wszystkim tzw. szeregi potęgowe.

# Szereg potęgowy - definicja

Naszym celem będzie zapisanie wzorów funkcji, jako szeregów „z parametrem”, którym jest zmienna $x \in D_f$. Jako, że chcemy, by w rezultacie badać wielomiany (a raczej pewne ich uogólnienia zezwalające na nieskończenie wiele składników jednomianowych), przedmiotem naszego zainteresowanie będą przede wszystkim tzw. szeregi potęgowe.

## Szereg potęgowy

*Szeregiem potęgowym* zmiennej rzeczywistej $x$ o środku w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ i współczynnikach $a_n \in \mathbb{R}$ nazywamy szereg postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

# Szereg potęgowy - dziedzina i zbieżność

Jeśli chcemy definiować funkcję daną wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, będziemy potrzebować dziedziny tej funkcji.

# Szereg potęgowy - dziedzina i zbieżność

Jeśli chcemy definiować funkcję daną wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, będziemy potrzebować dziedziny tej funkcji. Naturalnie, jeśli nie mamy żadnych dodatkowych ograniczeń, $z \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - x_0)^n$ jest zbieżny.

# Szereg potęgowy - dziedzina i zbieżność

Jeśli chcemy definiować funkcję daną wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, będziemy potrzebować dziedziny tej funkcji. Naturalnie, jeśli nie mamy żadnych dodatkowych ograniczeń, $z \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - x_0)^n$ jest zbieżny. Zawsze wiemy, że $x_0 \in D_f$, więc dziedzina jest niepusta.

# Szereg potęgowy - dziedzina i zbieżność

Jeśli chcemy definiować funkcję daną wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, będziemy potrzebować dziedziny tej funkcji. Naturalnie, jeśli nie mamy żadnych dodatkowych ograniczeń, $z \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - x_0)^n$ jest zbieżny. Zawsze wiemy, że $x_0 \in D_f$, więc dziedzina jest niepusta. Jeśli dziedzina szeregu potęgowego jest większa niż ten jeden punkt, jest pewnym przedziałem (lub całym zbiorem $\mathbb{R}$).

# Szereg potęgowy - dziedzina i zbieżność

Jeśli chcemy definiować funkcję daną wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, będziemy potrzebować dziedziny tej funkcji. Naturalnie, jeśli nie mamy żadnych dodatkowych ograniczeń, $z \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - x_0)^n$ jest zbieżny. Zawsze wiemy, że $x_0 \in D_f$, więc dziedzina jest niepusta. Jeśli dziedzina szeregu potęgowego jest większa niż ten jeden punkt, jest pewnym przedziałem (lub całym zbiorem $\mathbb{R}$). Na tym wykładzie nie będziemy się zajmować końcami tego przedziału (jako sytuacje osobliwe, nie mają one znaczenia w modelach ekonomicznych), więc będziemy zakładać, że jeśli $f$ jest zdefiniowana jako szereg potęgowy, to $D_f$ jest przedziałem otwartym.

# Promień zbieżności

## Promień zbieżności

*Promieniem zbieżności* szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ nazywamy taką liczbę $R \geqslant 0$, że szereg jest zbieżny dla $x$ takich, że $|x - x_0| < R$ i rozbieżny dla $|x - x_0| > R$. Jeśli szereg jest zbieżny w całym $\mathbb{R}$, to zapisujemy $R = +\infty$.

# Promień zbieżności

## Promień zbieżności

*Promieniem zbieżności* szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ nazywamy taką liczbę $R \geqslant 0$, że szereg jest zbieżny dla $x$ takich, że $|x - x_0| < R$ i rozbieżny dla $|x - x_0| > R$. Jeśli szereg jest zbieżny w całym $\mathbb{R}$, to zapisujemy $R = +\infty$.

Dla $x = x_0 - R$ lub $x = x_0 + R$ szereg potęgowy może, ale nie musi być zbieżny.

# Promień zbieżności

## Promień zbieżności

*Promieniem zbieżności* szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ nazywamy taką liczbę $R \geqslant 0$, że szereg jest zbieżny dla $x$ takich, że $|x - x_0| < R$ i rozbieżny dla $|x - x_0| > R$. Jeśli szereg jest zbieżny w całym $\mathbb{R}$, to zapisujemy $R = +\infty$.

Dla $x = x_0 - R$ lub $x = x_0 + R$ szereg potęgowy może, ale nie musi być zbieżny. Te dwa szeregi liczbowe (po wstawieniu odpowiednich wartości za parametr $x$) należałoby badać osobno. Jak już wspomnieliśmy, nie będziemy się tym zajmować.

## Promień zbieżności

*Promieniem zbieżności* szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ nazywamy taką liczbę $R \geqslant 0$, że szereg jest zbieżny dla $x$ takich, że $|x - x_0| < R$ i rozbieżny dla $|x - x_0| > R$. Jeśli szereg jest zbieżny w całym $\mathbb{R}$, to zapisujemy $R = +\infty$.

Dla $x = x_0 - R$ lub $x = x_0 + R$ szereg potęgowy może, ale nie musi być zbieżny. Te dwa szeregi liczbowe (po wstawieniu odpowiednich wartości za parametr $x$) należałoby badać osobno. Jak już wspomnieliśmy, nie będziemy się tym zajmować. Oczywiście, jeśli $R = 0$, to szereg potęgowy jest zbieżny tylko dla $x = x_0$.

# Otwarty przedział zbieżności

## Otwarty przedział zbieżności

*Otwartym przedziałem zbieżności* szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ nazywamy przedział $(x_0 - R, x_0 + R)$, gdzie $R$ jest promieniem zbieżności tego szeregu o ile $0 < R < +\infty$. Jeśli $R = +\infty$ to otwartym przedziałem zbieżności nazywamy $\mathbb{R}$. Otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego utożsamiamy z dziedziną funkcji danej wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

# Otwarty przedział zbieżności

## Otwarty przedział zbieżności

*Otwartym przedziałem zbieżności* szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ nazywamy przedział $(x_0 - R, x_0 + R)$, gdzie $R$ jest promieniem zbieżności tego szeregu o ile $0 < R < +\infty$. Jeśli $R = +\infty$ to otwartym przedziałem zbieżności nazywamy $\mathbb{R}$. Otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego utożsamiamy z dziedziną funkcji danej wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Jeśli $R = 0$, to nie ma sensu definiować funkcji o dziedzinie jednopunktowej, choć moglibyśmy uznać, że przedziałem zbieżności szeregu jest sam punkt $\{x_0\}$.

# Przykład

Rozważaliśmy szereg: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$.

# Przykład

Rozważaliśmy szereg: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$. Można go potraktować jako szereg potęgowy o środku w 0 postaci: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, gdzie $a_n = 0$ dla $n$ nieparzystych, a $a_n = 1$ dla $n$ parzystych (czyli $f(x) = 1 + 0 \cdot x + x^2 + 0 \cdot x^3 + x^4 + \ldots$).

# Przykład

Rozważaliśmy szereg: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$. Można go potraktować jako szereg potęgowy o środku w 0 postaci: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, gdzie $a_n = 0$ dla $n$ nieparzystych, a $a_n = 1$ dla $n$ parzystych (czyli $f(x) = 1 + 0 \cdot x + x^2 + 0 \cdot x^3 + x^4 + \ldots$).
Jak obliczyliśmy wcześniej z własności szeregów geometrycznych, szereg ten jest zbieżny dla $|x| < 1$, zatem jego otwarty przedział zbieżności to $(-1, 1)$, a promień zbieżności wynosi 1.

# Przedziały zbieżności szeregów potęgowych

Wiemy już, jak wyznaczać przedział zbieżności w wypadku szeregów potęgowych będących jednocześnie szeregami geometrycznymi - wystarczy rozwiązać nierówność $|q| < 1$, gdzie $q$ jest ilorazem tego szeregu.

# Przedziały zbieżności szeregów potęgowych

Wiemy już, jak wyznaczać przedział zbieżności w wypadku szeregów potęgowych będących jednocześnie szeregami geometrycznymi - wystarczy rozwiązać nierówność $|q| < 1$, gdzie $q$ jest ilorazem tego szeregu. W przypadku ogólnym sytuacja jest trudniejsza. Na szczęście, często można skorzystać z jednego z dwu ważnych twierdzeń: d'Alamberta lub Cauchy'ego.

# Twierdzenia d'Alamberta i Cauchy'ego o przedziałach zbieżności szeregów potęgowych

## Twierdzenie d'Alamberta

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ będzie szeregiem potęgowym. Jeśli istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$ i jeśli $g \neq 0$, to promień zbieżności tego szeregu $R = \frac{1}{g}$. Ponadto, jeśli $g = 0$ to $R = +\infty$, a jeśli $g = +\infty$ to $R = 0$.

# Twierdzenia d'Alamberta i Cauchy'ego o przedziałach zbieżności szeregów potęgowych

## Twierdzenie d'Alamberta

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ będzie szeregiem potęgowym. Jeśli istnieje skończona granica $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$ i jeśli $g \neq 0$, to promień zbieżności tego szeregu $R = \frac{1}{g}$. Ponadto, jeśli $g = 0$ to $R = +\infty$, a jeśli $g = +\infty$ to $R = 0$.

## Twierdzenie Cauchy'ego

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ będzie szeregiem potęgowym. Jeśli istnieje skończona granica $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = g$ i jeśli $g \neq 0$, to promień zbieżności tego szeregu $R = \frac{1}{g}$. Ponadto, jeśli $g = 0$ to $R = +\infty$, a jeśli $g = +\infty$ to $R = 0$.

# Twierdzenia d'Alamberta i Cauchy'ego - komentarz

Tak jak w wypadku całek (czy całkować przez części, czy podstawienie i jakie podstawienie?) nie ma jednej reguły, dzięki której możnaby ocenić, który szereg badać twierdzeniem d'Alamberta, a który Cauchy'ego (a czasem obydwie te metody mogą nie zadziałać!). Trzeba wyrobić sobie intuicję, najlepiej rozwiązując odpowiednio dużo przykładów.

# Twierdzenia d'Alamberta i Cauchy'ego - komentarz

Tak jak w wypadku całek (czy całkować przez części, czy podstawienie i jakie podstawienie?) nie ma jednej reguły, dzięki której możnaby ocenić, który szereg badać twierdzeniem d'Alamberta, a który Cauchy'ego (a czasem obydwie te metody mogą nie zadziałać!). Trzeba wyrobić sobie intuicję, najlepiej rozwiązując odpowiednio dużo przykładów. Ogólna wskazówka jest następująca: twierdzenie d'Alamberta wykorzystujemy najczęściej, gdy wyrazy ciągu $a_n$ są w postaci związanej z iloczynem (potęgi, silnie), a twierdzenie Cauchy'ego, gdy wyrazy ciągu $a_n$ są sumami - np. wielomianami (przydatny może być wtedy wniosek o granicy $\sqrt[n]{W(n)}$ z poprzedniego wykładu oraz twierdzenie o trzech funkcjach z wykładu o granicach funkcji).

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 2

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n.$$

By znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego za pomocą twierdzenia d'Alamberta lub Cauchy'ego potrzebujemy jego środka oraz jego promienia zbieżności.
Na początku wyznaczamy środek szeregu (i zarazem jego przedziału zbieżności).

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 2

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n.$$

By znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego za pomocą twierdzenia d'Alamberta lub Cauchy'ego potrzebujemy jego środka oraz jego promienia zbieżności.
Na początku wyznaczamy środek szeregu (i zarazem jego przedziału zbieżności). W tym wypadku, jako, że mamy wewnątrz szeregu samo $x^n$ (a nie $(x - x_0)^n$), środkiem szeregu jest $x_0 = 0$.

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 2

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n.$$

By znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego za pomocą twierdzenia d'Alamberta lub Cauchy'ego potrzebujemy jego środka oraz jego promienia zbieżności.
Na początku wyznaczamy środek szeregu (i zarazem jego przedziału zbieżności). W tym wypadku, jako, że mamy wewnątrz szeregu samo $x^n$ (a nie $(x - x_0)^n$), środkiem szeregu jest $x_0 = 0$.
$a_n = \frac{e^n}{n!}$.

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 2

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n.$$

By znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego za pomocą twierdzenia d'Alamberta lub Cauchy'ego potrzebujemy jego środka oraz jego promienia zbieżności.
Na początku wyznaczamy środek szeregu (i zarazem jego przedziału zbieżności). W tym wypadku, jako, że mamy wewnątrz szeregu samo $x^n$ (a nie $(x - x_0)^n$), środkiem szeregu jest $x_0 = 0$.
$a_n = \frac{e^n}{n!}$. Jako, że w tym wyrazie nie ma żadnych sum, są tylko potęgi i silnie, do znalezienia promienia zbieżności użyjemy twierdzenia d'Alamberta.

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 2

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n.$$

Obliczamy zatem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{e^n}{n!} =$$

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 2

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n.$$

Obliczamy zatem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{e^n}{n!} = \frac{e}{n+1}.$$

Jako, że $\lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} =$

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 2

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n.$$

Obliczamy zatem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{e^n}{n!} = \frac{e}{n+1}.$$

Jako, że $\lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, to z twierdzenia d'Alamberta $R =$

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 2

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n.$$

Obliczamy zatem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{e^n}{n!} = \frac{e}{n+1}.$$

Jako, że $\lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, to z twierdzenia d'Alamberta $R = +\infty$, czyli otwartym przedziałem zbieżności zadanego szeregu potęgowego jest

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 2

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n.$$

Obliczamy zatem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{e^n}{n!} = \frac{e}{n+1}.$$

Jako, że $\lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, to z twierdzenia d'Alamberta $R = +\infty$, czyli otwartym przedziałem zbieżności zadanego szeregu potęgowego jest cały zbiór $\mathbb{R}$.

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 3

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^5 + n^2 + 1}{2^n + 3^n}(2x - 1)^n.$$

Na początku wyznaczamy środek szeregu (i zarazem jego przedziału zbieżności).

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 3

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^5 + n^2 + 1}{2^n + 3^n} (2x - 1)^n.$$

Na początku wyznaczamy środek szeregu (i zarazem jego przedziału zbieżności). W tym wypadku, musimy sprowadzić część zawierającą $x$ do postaci $(x - x_0)^n$, zatem zapisujemy szereg w postaci $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}(x - \frac{1}{2})^n$.

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 3

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^5 + n^2 + 1}{2^n + 3^n}(2x - 1)^n.$$

Na początku wyznaczamy środek szeregu (i zarazem jego przedziału zbieżności). W tym wypadku, musimy sprowadzić część zawierającą $x$ do postaci $(x - x_0)^n$, zatem zapisujemy szereg w postaci $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}(x - \frac{1}{2})^n$. Stąd środek szeregu to $x_0 = \frac{1}{2}$.
$a_n = \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}$.

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 3

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^5 + n^2 + 1}{2^n + 3^n}(2x-1)^n.$$

Na początku wyznaczamy środek szeregu (i zarazem jego przedziału zbieżności). W tym wypadku, musimy sprowadzić część zawierającą $x$ do postaci $(x - x_0)^n$, zatem zapisujemy szereg w postaci $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}(x - \frac{1}{2})^n$. Stąd środek szeregu to $x_0 = \frac{1}{2}$.
$a_n = \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}$. Jako, że zarówno w liczniku, jak i w mianowniku pojawiają się sumy, musimy skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego.

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 3

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}(x - \frac{1}{2})^n$.

Obliczamy zatem:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n(3n^5 + n^2 + 1)}{2^n + 3^n}} =$$

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 3

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}(x-\frac{1}{2})^n$.

Obliczamy zatem:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}} = \frac{2\sqrt[n]{3n^5+n^2+1}}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^5+n^2+1} =$$

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 3

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}(x-\frac{1}{2})^n$.

Obliczamy zatem:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}} = \frac{2\sqrt[n]{3n^5+n^2+1}}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^5+n^2+1} = 1$ (na podstawie wykładu 14), a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} =$

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 3

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}(x-\frac{1}{2})^n$.

Obliczamy zatem:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}} = \frac{2\sqrt[n]{3n^5+n^2+1}}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^5+n^2+1} = 1$ (na podstawie wykładu 14), a
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$ (na podstawie twierdzenia o 3 funkcjach), więc
$g = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 3

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}(x-\frac{1}{2})^n$.

Obliczamy zatem:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}} = \frac{2\sqrt[n]{3n^5+n^2+1}}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^5+n^2+1} = 1$ (na podstawie wykładu 14), a
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$ (na podstawie twierdzenia o 3 funkcjach), więc
$g = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3}$, skąd $R =$

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 3

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}(x-\frac{1}{2})^n$.

Obliczamy zatem:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}} = \frac{2\sqrt[n]{3n^5+n^2+1}}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^5+n^2+1} = 1$ (na podstawie wykładu 14), a
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$ (na podstawie twierdzenia o 3 funkcjach), więc
$g = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3}$, skąd $R = \frac{1}{g} = \frac{3}{2}$ (z twierdzenia Cauchy'ego), czyli otwartym przedziałem zbieżności zadanego szeregu potęgowego jest

# Zbieżność szeregu potęgowego - przykład 3

## Zadanie

Znaleźć otwarty przedział zbieżności szeregu potęgowego:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}(x-\frac{1}{2})^n$.

Obliczamy zatem:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n(3n^5+n^2+1)}{2^n+3^n}} = \frac{2\sqrt[n]{3n^5+n^2+1}}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^5+n^2+1} = 1$ (na podstawie wykładu 14), a
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$ (na podstawie twierdzenia o 3 funkcjach), więc
$g = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3}$, skąd $R = \frac{1}{g} = \frac{3}{2}$ (z twierdzenia Cauchy'ego), czyli otwartym przedziałem zbieżności zadanego szeregu potęgowego jest $(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}+\frac{3}{2}) = (-1, 2)$.