14b. Analiza zmiennych dyskretnych: szeregi liczbowe

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n =$$

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n = 3 +$$

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n = 3 + 4 +$$

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n = 3 + 4 + 5 + \ldots +$$

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n = 3 + 4 + 5 + \ldots + (k-1) + k.$$

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n = 3 + 4 + 5 + \ldots + (k-1) + k.$$

$$\sum_{n=1}^{5} (2n-1)^2 =$$

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n = 3 + 4 + 5 + \ldots + (k-1) + k.$$

$$\sum_{n=1}^{5} (2n-1)^2 = 1^2 +$$

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n = 3 + 4 + 5 + \ldots + (k-1) + k.$$

$$\sum_{n=1}^{5} (2n-1)^2 = 1^2 + 3^2 +$$

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n = 3 + 4 + 5 + \ldots + (k-1) + k.$$

$$\sum_{n=1}^{5} (2n-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 +$$

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n = 3 + 4 + 5 + \ldots + (k-1) + k.$$

$$\sum_{n=1}^{5} (2n-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 +$$

Wstęp - symbol sumy

Prawdopodobnie symbol ten był używany w szkole, a prawie na pewno podczas zajęć w tym roku, ale na wszelki wypadek przypomnę, że symbolu Σ (grecka wielka litera sigma) używa się do oznaczania sum:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Taka notacja często pozwala nam skrócić i ujednoznacznić zapis. Na przykład:

$$\sum_{n=3}^{k} n = 3 + 4 + 5 + \ldots + (k-1) + k.$$

$$\sum_{n=1}^{5} (2n-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2.$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 =$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 +$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots +$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 =$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Szczególnie istotne dla nas jest, że pod symbolem sumy może się znaleźć nieskończenie wiele elementów np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Szczególnie istotne dla nas jest, że pod symbolem sumy może się znaleźć nieskończenie wiele elementów np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 +$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Szczególnie istotne dla nas jest, że pod symbolem sumy może się znaleźć nieskończenie wiele elementów np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} +$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Szczególnie istotne dla nas jest, że pod symbolem sumy może się znaleźć nieskończenie wiele elementów np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} +$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Szczególnie istotne dla nas jest, że pod symbolem sumy może się znaleźć nieskończenie wiele elementów np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Szczególnie istotne dla nas jest, że pod symbolem sumy może się znaleźć nieskończenie wiele elementów np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n =$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Szczególnie istotne dla nas jest, że pod symbolem sumy może się znaleźć nieskończenie wiele elementów np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Szczególnie istotne dla nas jest, że pod symbolem sumy może się znaleźć nieskończenie wiele elementów np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 +$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Szczególnie istotne dla nas jest, że pod symbolem sumy może się znaleźć nieskończenie wiele elementów np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1$$

Symbol sumy - rozwinięcie

Wewnątrz sumy nie musi być odniesienia do literki według której sumujemy (tzw. licznika pętli):

$$\sum_{n=1}^{k} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = k.$$

Szczególnie istotne dla nas jest, że pod symbolem sumy może się znaleźć nieskończenie wiele elementów np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots .$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots .$$

Sumy nieskończone

Rozważamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Sumy nieskończone

Rozważamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Zauważmy, że w takiej sytuacji dodając kolejno tylko skończoną, ale coraz większą liczbę składników sumy (czyli biorąc najpierw pierwszy element, potem sumę pierwszych dwu, sumę pierwszych trzech itd.) również tworzymy pewien ciąg $(\sum_{n=1}^{k} a_n)_{k=1}^{\infty}$

Sumy nieskończone

Rozważamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Zauważmy, że w takiej sytuacji dodając kolejno tylko skończoną, ale coraz większą liczbę składników sumy (czyli biorąc najpierw pierwszy element, potem sumę pierwszych dwu, sumę pierwszych trzech itd.) również tworzymy pewien ciąg $\left(\sum_{n=1}^{k} a_n\right)_{k=1}^{\infty}$, który oczywiście może być zbieżny lub rozbieżny.

Sumy nieskończone

Rozważamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Zauważmy, że w takiej sytuacji dodając kolejno tylko skończoną, ale coraz większą liczbę składników sumy (czyli biorąc najpierw pierwszy element, potem sumę pierwszych dwu, sumę pierwszych trzech itd.) również tworzymy pewien ciąg $(\sum_{n=1}^{k} a_n)_{k=1}^{\infty}$, który oczywiście może być zbieżny lub rozbieżny. Jeśli taki ciąg jest zbieżny, to nieskończona suma ma sens - jest granicą takiego ciągu sum częściowych, co zapisujemy następująco:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$$

.

Sumy nieskończone

Rozważamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Zauważmy, że w takiej sytuacji dodając kolejno tylko skończoną, ale coraz większą liczbę składników sumy (czyli biorąc najpierw pierwszy element, potem sumę pierwszych dwu, sumę pierwszych trzech itd.) również tworzymy pewien ciąg $(\sum_{n=1}^{k} a_n)_{k=1}^{\infty}$, który oczywiście może być zbieżny lub rozbieżny. Jeśli taki ciąg jest zbieżny, to nieskończona suma ma sens - jest granicą takiego ciągu sum częściowych, co zapisujemy następująco:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$$

.
Czy to możliwe, by suma nieskończenie wielu elementów dawała skończoną wartość nawet przy założeniu, że wszystkie te elementy są dodatnie?

Sumy nieskończone

Rozważamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Zauważmy, że w takiej sytuacji dodając kolejno tylko skończoną, ale coraz większą liczbę składników sumy (czyli biorąc najpierw pierwszy element, potem sumę pierwszych dwu, sumę pierwszych trzech itd.) również tworzymy pewien ciąg $(\sum_{n=1}^{k} a_n)_{k=1}^{\infty}$, który oczywiście może być zbieżny lub rozbieżny. Jeśli taki ciąg jest zbieżny, to nieskończona suma ma sens - jest granicą takiego ciągu sum częściowych, co zapisujemy następująco:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$$

.
Czy to możliwe, by suma nieskończenie wielu elementów dawała skończoną wartość nawet przy założeniu, że wszystkie te elementy są dodatnie? Jak najbardziej - prosty, a nietrywialny przykład podaje następująca zagadka:

Zagadka - suchar matematyczny

Zagadka

Nieskończenie wielu matematyków przychodzi do baru. Pierwszy mówi do barmana: „Poproszę jedno piwo". Drugi mówi: „Poproszę połowę tego, co pierwszy". Trzeci mówi: „Poproszę połowę tego co drugi". Zanim czwarty się odezwał, barman pyta: „ Czy wszyscy kolejni zamawiają połowę tego, co poprzedni?" i po otrzymaniu twierdzącej odpowiedzi nalewa... no właśnie, ile piw?

Zagadka - suchar matematyczny

Zagadka

Nieskończenie wielu matematyków przychodzi do baru. Pierwszy mówi do barmana: „Poproszę jedno piwo”. Drugi mówi: „Poproszę połowę tego, co pierwszy”. Trzeci mówi: „Poproszę połowę tego co drugi”. Zanim czwarty się odezwał, barman pyta: „ Czy wszyscy kolejni zamawiają połowę tego, co poprzedni?” i po otrzymaniu twierdzącej odpowiedzi nalewa... no właśnie, ile piw?

Jak łatwo zauważyć, sprawa sprowadza się do pytania: jaka jest wartość sumy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n ?$$

Zagadka - rozwiązanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = ?$$

Zauważmy, że dla dowolnego n zachodzi $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (czyli $1 = 2 - 1$, $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ itp.).

Zagadka - rozwiązanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = ?$$

Zauważmy, że dla dowolnego n zachodzi $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (czyli $1 = 2 - 1$, $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ itp.). Dlatego $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Zagadka - rozwiązanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = ?$$

Zauważmy, że dla dowolnego n zachodzi $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (czyli $1 = 2 - 1$, $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ itp.). Dlatego $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Rozważmy $\sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

$(2-1)+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\ldots+(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1})+(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k})$

Zagadka - rozwiązanie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = ?$$

Zauważmy, że dla dowolnego n zachodzi $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (czyli $1 = 2-1$, $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ itp.). Dlatego $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Rozważmy $\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

$(2-1)+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\ldots+(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1})+(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}) =$

$2+(-1+1)+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})+\ldots(-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1})-\left(\frac{1}{2}\right)^{k} =$

Zagadka - rozwiązanie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = ?$$

Zauważmy, że dla dowolnego n zachodzi $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ (czyli $1 = 2-1$, $\frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ itp.). Dlatego $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

Rozważmy $\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} =$

$(2-1)+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\ldots+(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1})+(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}) =$

$2+(-1+1)+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})+\ldots(-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1})-\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$.

Zagadka - rozwiązanie

Ostatecznie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} =$$

Zagadka - rozwiązanie

Ostatecznie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}2-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=$$

Zagadka - rozwiązanie

Ostatecznie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right] =$$

Zagadka - rozwiązanie

Ostatecznie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}2-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right]=2.$$

Zagadka - rozwiązanie

Ostatecznie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right] = 2.$$

Dlatego dla całej nieskończonej kolejki matematyków potrzebne były tylko 2 piwa.

Dodatkowe uwagi przed formalizacją

Oczywiście, nie wszystkie sumy nieskończone da się policzyć, a nawet często nie są one w ogóle zbieżne. Na przykład $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ ewidentnie jest rozbieżna do nieskończoności, a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ w ogóle nie ma granicy (mimo, że jest ograniczona).

Dodatkowe uwagi przed formalizacją

Oczywiście, nie wszystkie sumy nieskończone da się policzyć, a nawet często nie są one w ogóle zbieżne. Na przykład $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ ewidentnie jest rozbieżna do nieskończoności, a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ w ogóle nie ma granicy (mimo, że jest ograniczona).
By prawidłowo posługiwać się takimi nieskończonymi sumami potrzebujemy sformalizować niektóre pojęcia z tego zakresu.

Dodatkowe uwagi przed formalizacją

Oczywiście, nie wszystkie sumy nieskończone da się policzyć, a nawet często nie są one w ogóle zbieżne. Na przykład $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ ewidentnie jest rozbieżna do nieskończoności, a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ w ogóle nie ma granicy (mimo, że jest ograniczona).
By prawidłowo posługiwać się takimi nieskończonymi sumami potrzebujemy sformalizować niektóre pojęcia z tego zakresu.
Formalnie takie sumy nazywamy szeregami liczbowymi.

Sumy nieskończone - uwaga techniczna

Jak widać po sumie $\sum_{n=3}^{\infty} n = 3 + 4 + 5 + \ldots$ sumowanie można zacząć od dowolnego miejsca (tj. najmniejsza wartość licznika sumy, czyli najmniejsze n może być równe np. 3).

Sumy nieskończone - uwaga techniczna

Jak widać po sumie $\sum_{n=3}^{\infty} n = 3 + 4 + 5 + \ldots$ sumowanie można zacząć od dowolnego miejsca (tj. najmniejsza wartość licznika sumy, czyli najmniejsze n może być równe np. 3). Ponieważ najczęściej dla sum nieskończonych najistotniejsze jest to, co się dzieje w nieskończoności (czyli dla dużych wartości licznika) i dla ustalenia uwagi na rzeczach istotnych, w twierdzeniach i definicjach tego rozdziału jako najmniejszą wartość będzie występować $n = 1$ lub $n = 0$ (chyba, że jest wyraźnie napisane inaczej).

Sumy nieskończone - uwaga techniczna

Jak widać po sumie $\sum_{n=3}^{\infty} n = 3 + 4 + 5 + \ldots$ sumowanie można zacząć od dowolnego miejsca (tj. najmniejsza wartość licznika sumy, czyli najmniejsze n może być równe np. 3). Ponieważ najczęściej dla sum nieskończonych najistotniejsze jest to, co się dzieje w nieskończoności (czyli dla dużych wartości licznika) i dla ustalenia uwagi na rzeczach istotnych, w twierdzeniach i definicjach tego rozdziału jako najmniejszą wartość będzie występować $n = 1$ lub $n = 0$ (chyba, że jest wyraźnie napisane inaczej). Jednak wszystkie one zachowują ważność dla dowolnego n, więc nie jest to żaden problem dla konkretnych zadań.

Szeregi - definicje

Szereg

Szeregiem o wyrazie ogólnym $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy ciąg sum częściowych S_k, gdzie $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Szereg taki oznaczamy symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Szeregi - definicje

Szereg

Szeregiem o wyrazie ogólnym $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy ciąg sum częściowych S_k, gdzie $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Szereg taki oznaczamy symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Zbieżność, suma i rozbieżność szeregu

Szereg nazywamy *zbieżnym* do liczby $S \in \mathbb{R}$ jeśli ciąg sum częściowych S_k jest zbieżny do tej granicy. Liczbę S nazywamy sumą szeregu i zapisujemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy *rozbieżnym*.

Szeregi - definicje

Szereg

Szeregiem o wyrazie ogólnym $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy ciąg sum częściowych S_k, gdzie $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Szereg taki oznaczamy symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Zbieżność, suma i rozbieżność szeregu

Szereg nazywamy *zbieżnym* do liczby $S \in \mathbb{R}$ jeśli ciąg sum częściowych S_k jest zbieżny do tej granicy. Liczbę S nazywamy sumą szeregu i zapisujemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy *rozbieżnym*.

Może się wydawać, że mamy tu kolizję oznaczeń, bo przez $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oznaczamy zarówno szereg, jak i jego sumę (granicę). Po prostu taka jest tradycja tego oznaczenia i z kontekstu zawsze można odgadnąć o co chodzi, więc wyjątkowo taką kolizją się nie przejmujemy.

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Rozwińmy wcześniejsze przykłady w świetle omówionych definicji.

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Rozwińmy wcześniejsze przykłady w świetle omówionych definicji.
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Rozwińmy wcześniejsze przykłady w świetle omówionych definicji.
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych
$(1, 1+(-1), 1+(-1)+1, 1+(-1)+1+(-1), \ldots) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$.

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Rozwińmy wcześniejsze przykłady w świetle omówionych definicji.
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, 1+(-1), 1+(-1)+1, 1+(-1)+1+(-1), \ldots) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$.
Ten ciąg ewidentnie nie jest zbieżny (bo nie może mieć dwu różnych granic, a jego elementy są tak samo blisko 0, jak 1).

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Rozwińmy wcześniejsze przykłady w świetle omówionych definicji.
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, 1+(-1), 1+(-1)+1, 1+(-1)+1+(-1), \ldots) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$.
Ten ciąg ewidentnie nie jest zbieżny (bo nie może mieć dwu różnych granic, a jego elementy są tak samo blisko 0, jak 1).
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Rozwińmy wcześniejsze przykłady w świetle omówionych definicji.
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, 1+(-1), 1+(-1)+1, 1+(-1)+1+(-1), \ldots) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$.
Ten ciąg ewidentnie nie jest zbieżny (bo nie może mieć dwu różnych granic, a jego elementy są tak samo blisko 0, jak 1).
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \ldots) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$, czyli ciągiem $a_n = n$.

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Rozwińmy wcześniejsze przykłady w świetle omówionych definicji.
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, 1+(-1), 1+(-1)+1, 1+(-1)+1+(-1), \ldots) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$.
Ten ciąg ewidentnie nie jest zbieżny (bo nie może mieć dwu różnych granic, a jego elementy są tak samo blisko 0, jak 1).
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \ldots) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$, czyli ciągiem $a_n = n$. Granicą tego ciagu jest $\lim_{x \to -\infty} n = \lim_{x \to \infty} x = +\infty$, więc szereg wyjściowy nie jest zbieżny.

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Rozwińmy wcześniejsze przykłady w świetle omówionych definicji.
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, 1+(-1), 1+(-1)+1, 1+(-1)+1+(-1), \ldots) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$. Ten ciąg ewidentnie nie jest zbieżny (bo nie może mieć dwu różnych granic, a jego elementy są tak samo blisko 0, jak 1).
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \ldots) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$, czyli ciągiem $a_n = n$. Granicą tego ciagu jest $\lim\limits_{x \to -\infty} n = \lim\limits_{x \to \infty} x = +\infty$, więc szereg wyjściowy nie jest zbieżny.
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots)$, czyli ciągiem $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$.

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Rozwińmy wcześniejsze przykłady w świetle omówionych definicji.
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, 1+(-1), 1+(-1)+1, 1+(-1)+1+(-1), \ldots) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$. Ten ciąg ewidentnie nie jest zbieżny (bo nie może mieć dwu różnych granic, a jego elementy są tak samo blisko 0, jak 1).
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \ldots) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$, czyli ciągiem $a_n = n$. Granicą tego ciagu jest $\lim\limits_{x\to-\infty} n = \lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$, więc szereg wyjściowy nie jest zbieżny.
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest tożsamy z szeregiem sum częściowych $(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots)$, czyli ciągiem $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$. Granicą tego ciagu jest 2, więc $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$ i szereg ten jest zbieżny.

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Generalnie, obliczanie wartości szeregów jest bardzo trudne i nie będziemy się tym zajmować (poza pewnym szczególnym przypadkiem). Niełatwym zagadnieniem jest nawet często sprawdzenie, czy dany szereg liczbowy jest zbieżny, czy nie. Na potrzeby tego kursu wystarczą nam poniższe fakty:

Warunek konieczny zbieżności szeregów

Jeśli a_n nie jest zbieżny do 0, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny.

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Generalnie, obliczanie wartości szeregów jest bardzo trudne i nie będziemy się tym zajmować (poza pewnym szczególnym przypadkiem). Niełatwym zagadnieniem jest nawet często sprawdzenie, czy dany szereg liczbowy jest zbieżny, czy nie. Na potrzeby tego kursu wystarczą nam poniższe fakty:

Warunek konieczny zbieżności szeregów

Jeśli a_n nie jest zbieżny do 0, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny.

To, że a_n jest zbieżny do 0, nie oznacza, ze $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Szeregi - przykłady - zbieżność i rozbieżność

Generalnie, obliczanie wartości szeregów jest bardzo trudne i nie będziemy się tym zajmować (poza pewnym szczególnym przypadkiem). Niełatwym zagadnieniem jest nawet często sprawdzenie, czy dany szereg liczbowy jest zbieżny, czy nie. Na potrzeby tego kursu wystarczą nam poniższe fakty:

Warunek konieczny zbieżności szeregów

Jeśli a_n nie jest zbieżny do 0, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny.

To, że a_n jest zbieżny do 0, nie oznacza, ze $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Zbieżność szeregów harmonicznych

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest szeregiem rozbieżnym. Uogólniając, dla każdego $\alpha > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny, a dla każdego $\alpha \leqslant 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest rozbieżny.

Ciekawostka - kryterium całkowe zbieżności szeregów

Ciekawostką jest fakt, że zbieżność szeregów i zbieżność całek niewłaściwych nie są zupełnie odmiennymi pojęciami.

Kryterium całkowe zbieżności szeregów

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest dodatnia i malejąca w przedziale $1 \leqslant x < +\infty$ i jeżeli $f(n) = a_n$ to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna.

Ciekawostka - kryterium całkowe zbieżności szeregów

Ciekawostką jest fakt, że zbieżność szeregów i zbieżność całek niewłaściwych nie są zupełnie odmiennymi pojęciami.

Kryterium całkowe zbieżności szeregów

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest dodatnia i malejąca w przedziale $1 \leqslant x < +\infty$ i jeżeli $f(n) = a_n$ to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna.

Kryterium to można wykorzystać np. do udowodnienia twierdzenia o szeregach harmonicznych z poprzedniej strony. Np. całka $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx =$

Ciekawostka - kryterium całkowe zbieżności szeregów

Ciekawostką jest fakt, że zbieżność szeregów i zbieżność całek niewłaściwych nie są zupełnie odmiennymi pojęciami.

Kryterium całkowe zbieżności szeregów

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest dodatnia i malejąca w przedziale $1 \leqslant x < +\infty$ i jeżeli $f(n) = a_n$ to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna.

Kryterium to można wykorzystać np. do udowodnienia twierdzenia o szeregach harmonicznych z poprzedniej strony. Np. całka $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{x \to \infty} (\ln x - \ln 1) = +\infty$ jest rozbieżna, więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Ciekawostka - kryterium całkowe zbieżności szeregów

Ciekawostką jest fakt, że zbieżność szeregów i zbieżność całek niewłaściwych nie są zupełnie odmiennymi pojęciami.

Kryterium całkowe zbieżności szeregów

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest dodatnia i malejąca w przedziale $1 \leqslant x < +\infty$ i jeżeli $f(n) = a_n$ to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna.

Kryterium to można wykorzystać np. do udowodnienia twierdzenia o szeregach harmonicznych z poprzedniej strony. Np. całka $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{x\to\infty}(\ln x - \ln 1) = +\infty$ jest rozbieżna, więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Z kolei całka $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx =$

Ciekawostka - kryterium całkowe zbieżności szeregów

Ciekawostką jest fakt, że zbieżność szeregów i zbieżność całek niewłaściwych nie są zupełnie odmiennymi pojęciami.

Kryterium całkowe zbieżności szeregów

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest dodatnia i malejąca w przedziale $1 \leqslant x < +\infty$ i jeżeli $f(n) = a_n$ to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna.

Kryterium to można wykorzystać np. do udowodnienia twierdzenia o szeregach harmonicznych z poprzedniej strony. Np. całka $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{x \to \infty} (\ln x - \ln 1) = +\infty$ jest rozbieżna, więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Z kolei całka $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{x \to \infty} (-\frac{1}{x} - (-\frac{1}{1})) = 1$ jest zbieżna, więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

Szeregi geometryczne

Jak wspomniałem, obliczanie wartości szeregów jest bardzo trudne i nie będziemy się tym zajmować. Wyjątkiem jest jeden prosty, ale bardzo ważny przypadek: szeregi geometryczne.

Szereg geometryczny

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ tj. taki, że a_n jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q nazywamy *szeregiem geometrycznym*.

Szeregi geometryczne

Jak wspomniałem, obliczanie wartości szeregów jest bardzo trudne i nie będziemy się tym zajmować. Wyjątkiem jest jeden prosty, ale bardzo ważny przypadek: szeregi geometryczne.

Szereg geometryczny

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ tj. taki, że a_n jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q nazywamy *szeregiem geometrycznym*.

Zbieżność szeregów geometrycznych

Jeśli pierwszy wyraz ogólny $a_0 \neq 0$ to szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $|q| < 1$. Wtedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$.

Szeregi geometryczne - przykład

Dzięki twierdzeniu z poprzedniego slajdu można w prostszy sposób rozwiązać wcześniejszą zagadkę:

Zadanie

Obliczyć $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Wystarczy zauważyć, że iloraz tego szeregu wynosi:

Szeregi geometryczne - przykład

Dzięki twierdzeniu z poprzedniego slajdu można w prostszy sposób rozwiązać wcześniejszą zagadkę:

Zadanie

Obliczyć $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Wystarczy zauważyć, że iloraz tego szeregu wynosi:
$q = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} : \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}$, a jego pierwszy wyraz ogólny to

Szeregi geometryczne - przykład

Dzięki twierdzeniu z poprzedniego slajdu można w prostszy sposób rozwiązać wcześniejszą zagadkę:

Zadanie

Obliczyć $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Wystarczy zauważyć, że iloraz tego szeregu wynosi:
$q = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} : \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}$, a jego pierwszy wyraz ogólny to
$a_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, by zgodnie ze wzorem policzyć:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{a_0}{1-q} =$$

Szeregi geometryczne - przykład

Dzięki twierdzeniu z poprzedniego slajdu można w prostszy sposób rozwiązać wcześniejszą zagadkę:

Zadanie

Obliczyć $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Wystarczy zauważyć, że iloraz tego szeregu wynosi:
$q = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} : \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}$, a jego pierwszy wyraz ogólny to $a_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, by zgodnie ze wzorem policzyć:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{a_0}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

co zgadza się z naszymi wcześniejszymi obliczeniami.