14a. Analiza zmiennych dyskretnych: ciągi liczbowe

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Wstęp

Podczas dotychczasowych wykładów rozważaliśmy przede wszystkim zależności funkcyjne pomiędzy *zmiennymi ciągłymi* tj. przyjmującymi dowolne wartości rzeczywiste. Jednak najczęściej, przynajmniej w kwestiach ekonomicznych, tak naprawdę posługujemy się *zmiennymi dyskretnymi*, czyli przyjmującymi wartości, które zmieniają się nie stopniowo, ale skokowo (czyli ich wartości zmieniają się co najmniej o określoną jednostkę - najlepszym przykładem jest założenie, że dana zmienna należy do liczb całkowitych).

Wstęp - przykład

Przykładowo, załóżmy, że rozwiązujemy zagadnienie optymalizacyjne i otrzymujemy wynik, że aby zmaksymalizować zysk stocznia powinna w tym roku wyprodukować $3\frac{17}{31}$ statku.

Wstęp - przykład

Przykładowo, załóżmy, że rozwiązujemy zagadnienie optymalizacyjne i otrzymujemy wynik, że aby zmaksymalizować zysk stocznia powinna w tym roku wyprodukować $3\frac{17}{31}$ statku. Oczywiście, ten wynik nie ma sensu w rzeczywistości, ze względu na to, że statki nie są dobrem nieskończenie podzielnym. Ale nawet w wypadku tego typu badania wielkości nieskończenie podzielnych, jak czas (przynajmniej z perspektywy przeciętnego człowieka, nie fizyka kwantowego) niektóre wyniki ekonomicznie mogą nie mieć sensu.

Wstęp - przykład

Przykładowo, załóżmy, że rozwiązujemy zagadnienie optymalizacyjne i otrzymujemy wynik, że aby zmaksymalizować zysk stocznia powinna w tym roku wyprodukować $3\frac{17}{31}$ statku. Oczywiście, ten wynik nie ma sensu w rzeczywistości, ze względu na to, że statki nie są dobrem nieskończenie podzielnym. Ale nawet w wypadku tego typu badania wielkości nieskończenie podzielnych, jak czas (przynajmniej z perspektywy przeciętnego człowieka, nie fizyka kwantowego) niektóre wyniki ekonomicznie mogą nie mieć sensu. Załóżmy, że w wyniku innego zagadnienia optymalizacyjnego obliczyliśmy, że idealny czas pracy jakiegoś pracownika przed przerwą na odpoczynek wynosi $\pi + \sqrt{3}$ godziny.

Wstęp - przykład

Przykładowo, załóżmy, że rozwiązujemy zagadnienie optymalizacyjne i otrzymujemy wynik, że aby zmaksymalizować zysk stocznia powinna w tym roku wyprodukować $3\frac{17}{31}$ statku. Oczywiście, ten wynik nie ma sensu w rzeczywistości, ze względu na to, że statki nie są dobrem nieskończenie podzielnym. Ale nawet w wypadku tego typu badania wielkości nieskończenie podzielnych, jak czas (przynajmniej z perspektywy przeciętnego człowieka, nie fizyka kwantowego) niektóre wyniki ekonomicznie mogą nie mieć sensu. Załóżmy, że w wyniku innego zagadnienia optymalizacyjnego obliczyliśmy, że idealny czas pracy jakiegoś pracownika przed przerwą na odpoczynek wynosi $\pi + \sqrt{3}$ godziny. Mało prawdopodobne, by udało się wprowadzić przerwę po dokładnie takim czasie.

Wstęp - przykład

Przykładowo, załóżmy, że rozwiązujemy zagadnienie optymalizacyjne i otrzymujemy wynik, że aby zmaksymalizować zysk stocznia powinna w tym roku wyprodukować $3\frac{17}{31}$ statku. Oczywiście, ten wynik nie ma sensu w rzeczywistości, ze względu na to, że statki nie są dobrem nieskończenie podzielnym. Ale nawet w wypadku tego typu badania wielkości nieskończenie podzielnych, jak czas (przynajmniej z perspektywy przeciętnego człowieka, nie fizyka kwantowego) niektóre wyniki ekonomicznie mogą nie mieć sensu. Załóżmy, że w wyniku innego zagadnienia optymalizacyjnego obliczyliśmy, że idealny czas pracy jakiegoś pracownika przed przerwą na odpoczynek wynosi $\pi + \sqrt{3}$ godziny. Mało prawdopodobne, by udało się wprowadzić przerwę po dokładnie takim czasie. Dlatego często potrzebujemy, by badana funkcja przyjmowała wartości w całkowitych jednostkach: czy to w sztukach, czy np. w sekundach (albo nawet latach).

Skąd się biorą zmienne dyskretne?

Jeśli dyskretny jest tylko zbiór sensownych wartości funkcji, albo wynik naszych obliczeń, to nie sprawia nam to wielkich problemów - możemy zazwyczaj założyć, że nasz wynik jest przybliżeniem rzeczywistego (np. w pierwszym z powyższych przykładów wyciągnąć wniosek, że stocznia powinna wyprodukować 3 lub 4 statki, a następnie oszacować, która z tych dwu sytuacji jest lepsza, a w drugim, że pracownik idealnie powinien przecować pomiędzy $4,5$ a 5 godzin przed przerwą).

Skąd się biorą zmienne dyskretne?

Jeśli dyskretny jest tylko zbiór sensownych wartości funkcji, albo wynik naszych obliczeń, to nie sprawia nam to wielkich problemów - możemy zazwyczaj założyć, że nasz wynik jest przybliżeniem rzeczywistego (np. w pierwszym z powyższych przykładów wyciągnąć wniosek, że stocznia powinna wyprodukować 3 lub 4 statki, a następnie oszacować, która z tych dwu sytuacji jest lepsza, a w drugim, że pracownik idealnie powinien przecować pomiędzy $4,5$ a 5 godzin przed przerwą). Często mamy jednak do czynienia z przypadkiem, gdy dziedzina funkcji jest zbiorem dyskretnym.

Skąd się biorą zmienne dyskretne?

Jeśli dyskretny jest tylko zbiór sensownych wartości funkcji, albo wynik naszych obliczeń, to nie sprawia nam to wielkich problemów - możemy zazwyczaj założyć, że nasz wynik jest przybliżeniem rzeczywistego (np. w pierwszym z powyższych przykładów wyciągnąć wniosek, że stocznia powinna wyprodukować 3 lub 4 statki, a następnie oszacować, która z tych dwu sytuacji jest lepsza, a w drugim, że pracownik idealnie powinien przecować pomiędzy $4,5$ a 5 godzin przed przerwą). Często mamy jednak do czynienia z przypadkiem, gdy dziedzina funkcji jest zbiorem dyskretnym. Tak naprawdę, takie są właśnie wyniki prawie wszystkich badań - np. gdy badamy funkcję dochodów jakiejś populacji, naszą jednostką, której przyporządkowujemy dochód jest jedna osoba. Jeśli mierzymy zmiany kursu akcji pewnej firmy w czasie, to pomiarów dokonujemy nie „w każdej chwili”, ale w pewnych odstępach czasu (co sekundę, godzinę, dzień, miesiąc, rok).

Zmienne dyskretne i ciągi

Taki model dokładniej niż przez funkcję zadaną na przedziale rzeczywistym jest zobrazowany przez ciąg - czyli funkcję zadaną na dyskretnym zbiorze liczb naturalnych.

Zmienne dyskretne i ciągi

Taki model dokładniej niż przez funkcję zadaną na przedziale rzeczywistym jest zobrazowany przez ciąg - czyli funkcję zadaną na dyskretnym zbiorze liczb naturalnych. Może on reprezentować np. cenę akcji w kolejnych momentach pomiaru.

Zmienne dyskretne i ciągi

Taki model dokładniej niż przez funkcję zadaną na przedziale rzeczywistym jest zobrazowany przez ciąg - czyli funkcję zadaną na dyskretnym zbiorze liczb naturalnych. Może on reprezentować np. cenę akcji w kolejnych momentach pomiaru. I właśnie takimi ciągami będziemy się zajmować w tym rozdziale. Przy okazji zwrócę uwagę, że ciągami macierzy posługiwaliśmy się na algebrze badając dynamikę dyskretną za pomocą równań różnicowych. Wtedy, jak i w tym rozdziale, istotną rolę pełniła granica takiego ciągu w nieskończoności.

Dlaczego zmienne ciągłe?

Skoro zmienne dyskretne są najczęściej bardziej realistyczne, to po co używać ciągłych?

Dlaczego zmienne ciągłe?

Skoro zmienne dyskretne są najczęściej bardziej realistyczne, to po co używać ciągłych? Okazuje się, że większość obliczeń są dużo łatwiejsza na zmiennych ciągłych. Dzięki zmiennym ciągłym mogliśmy rozważać nieskończenie małe zmiany zmiennych, co doprowadziło nas do tak użytecznych narzędzi jak granice w punktach, pochodne, czy całki.

Dlaczego zmienne ciągłe?

Skoro zmienne dyskretne są najczęściej bardziej realistyczne, to po co używać ciągłych? Okazuje się, że większość obliczeń są dużo łatwiejsza na zmiennych ciągłych. Dzięki zmiennym ciągłym mogliśmy rozważać nieskończenie małe zmiany zmiennych, co doprowadziło nas do tak użytecznych narzędzi jak granice w punktach, pochodne, czy całki. Na przykład - zbadanie optymalnej wielkości produkcji bez użycia pochodnych wymagałoby obliczenia zysków z produkcji dla każdej możliwej ilości produktu. Jeśli funkcję zysku z produkcji „uciąglimy", będziemy mogli użyć poznanych dotychczas metod i nawet jeśli uzyskany wynik będzie niemożliwy do realizacji, będziemy mogli się domyślać, że prawdziwie optymalny wynik leży gdzieś w pobliżu i wystarczy sprawdzić 2-3 możliwości najbliższe wynikowi przybliżonemu (jak w przykładzie o stoczniach).

Dlaczego zmienne ciągłe?

Skoro zmienne dyskretne są najczęściej bardziej realistyczne, to po co używać ciągłych? Okazuje się, że większość obliczeń są dużo łatwiejsza na zmiennych ciągłych. Dzięki zmiennym ciągłym mogliśmy rozważać nieskończenie małe zmiany zmiennych, co doprowadziło nas do tak użytecznych narzędzi jak granice w punktach, pochodne, czy całki. Na przykład - zbadanie optymalnej wielkości produkcji bez użycia pochodnych wymagałoby obliczenia zysków z produkcji dla każdej możliwej ilości produktu. Jeśli funkcję zysku z produkcji „uciąglimy", będziemy mogli użyć poznanych dotychczas metod i nawet jeśli uzyskany wynik będzie niemożliwy do realizacji, będziemy mogli się domyślać, że prawdziwie optymalny wynik leży gdzieś w pobliżu i wystarczy sprawdzić 2-3 możliwości najbliższe wynikowi przybliżonemu (jak w przykładzie o stoczniach). Jak już w tym rozdziale zobaczymy, wiele da się powiedzieć o zachowaniu się ciągu na podstawie zachowania funkcji będącej jego „uciągloną" wersją.

Cena „uciąglenia”

Jaka jest cena takiego uproszczenia?

Cena „uciąglenia"

Jaka jest cena takiego uproszczenia? Kluczową kwestią jest fakt, że otrzymujemy wyniki przybliżone. Sam pomiar danych ekonomicznych jest zazwyczaj obarczony sporym błędem, więc jeśli nasze uproszczenie spowoduje tylko niewielki błąd - nie zmieni to wniosków z modelu, więc takim błędem możemy się nie przejmować. Często w rozważaniach ekonomicznych mamy do czynienia z liczbami na tyle dużymi, że zmiana wartości w każdym z pojedynczych punktów ma bliski zeru wpływ na całość modelu, dlatego badając np. zmiany cen akcji w odstępach godzinowych przez 5 lat, rozkład dochodów w 40-milionowej populacji, czy koszt produkcji w fabryce w zależności od liczby wyprodukowanych gwoździ rocznie, możemy zazwyczaj założyć, że wartości tej funkcji zmieniają się w sposób ciągły i mieć pewność, że nie wpłynie to na wynik badań.

Cena „uciąglenia”

Jaka jest cena takiego uproszczenia? Kluczową kwestią jest fakt, że otrzymujemy wyniki przybliżone. Sam pomiar danych ekonomicznych jest zazwyczaj obarczony sporym błędem, więc jeśli nasze uproszczenie spowoduje tylko niewielki błąd - nie zmieni to wniosków z modelu, więc takim błędem możemy się nie przejmować. Często w rozważaniach ekonomicznych mamy do czynienia z liczbami na tyle dużymi, że zmiana wartości w każdym z pojedynczych punktów ma bliski zeru wpływ na całość modelu, dlatego badając np. zmiany cen akcji w odstępach godzinowych przez 5 lat, rozkład dochodów w 40-milionowej populacji, czy koszt produkcji w fabryce w zależności od liczby wyprodukowanych gwoździ rocznie, możemy zazwyczaj założyć, że wartości tej funkcji zmieniają się w sposób ciągły i mieć pewność, że nie wpłynie to na wynik badań. To, czy dane lub wynik różnią się od rzeczywistości o jedną godzinę, jedną osobę, czy jeden gwóźdź, w praktyce wspomnianych sytuacji nie ma znaczenia.

Kiedy można „uciąglić” model?

Natomiast naszą czujność powinno budzić stosowanie przybliżenia ciągłego, gdy mówimy o wielkościach małych w stosunku do jednostek pomiaru (np. wspomniana produkcja statków w stoczni w niedługim okresie czasu). Może się zdarzyć, że „uciąglenie” modelu zachowa dobre rezultaty, ale może się zdarzyć, że wynik stanie się zupełnie mylący.

Kiedy można „uciąglić” model?

Natomiast naszą czujność powinno budzić stosowanie przybliżenia ciągłego, gdy mówimy o wielkościach małych w stosunku do jednostek pomiaru (np. wspomniana produkcja statków w stoczni w niedługim okresie czasu). Może się zdarzyć, że „uciąglenie” modelu zachowa dobre rezultaty, ale może się zdarzyć, że wynik stanie się zupełnie mylący.
Ogólną zasadą jest, że ciągła aproksymacja (czyli przybliżenie funkcją ciągłą) ciągu jest dobrym narzędziem, gdy jednostki miary są małe w porównaniu z mierzonymi wielkościami. Warto pamiętać o sprawdzeniu tego warunku przed zastosowaniem bardziej wyrafinowanej matematyki do swoich badań.

Dygresja - metody numeryczne

To wszystko to nie jest tylko przybliżanie „tak na oko” - nie ma sensu tego precyzować w ramach tego wykładu, ale dla większości praktycznych zagadnień da się powyższą dyskusję poprowadzić ściśle.

Dygresja - metody numeryczne

To wszystko to nie jest tylko przybliżanie „tak na oko" - nie ma sensu tego precyzować w ramach tego wykładu, ale dla większości praktycznych zagadnień da się powyższą dyskusję poprowadzić ściśle. Przypomnę, że istnieje dział matematyki, który zajmuje się właśnie m.in. mierzeniem błędów popełnianych przy stosowaniu metod przybliżonych: są to metody numeryczne (spotkaliśmy się z nimi przy okazji całkowania przybliżonego).

Ciąg liczbowy

Ciąg liczbowy

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, której dziedziną jest $\mathbb{N}$.

Ciąg liczbowy

Ciąg liczbowy

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, której dziedziną jest $\mathbb{N}$.

Ciąg liczbowy skończony

Ciągiem liczbowym skończonym nazywamy funkcję o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, której dziedziną jest skończony podzbiór $\mathbb{N}$.

Ciąg liczbowy

Ciąg liczbowy

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, której dziedziną jest $\mathbb{N}$.

Ciąg liczbowy skończony

Ciągiem liczbowym skończonym nazywamy funkcję o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, której dziedziną jest skończony podzbiór $\mathbb{N}$.

Argumenty takiej funkcji nazywa się *indeksami ciągu*, a wartości - *wyrazami ciągu*. Często stosuje się zapis indeksu dolnego zamiast nawiasu funkcyjnego tj. jeśli a jest ciągiem to zamiast $a(n)$ piszemy a_n.

Ciąg liczbowy - uwagi

W szkole definiowane były ciągi: arytmetyczny (o zadanej różnicy) i geometryczny (o zadanym ilorazie) - nie będę powtarzał definicji, ale proszę sobie je przypomnieć.

Ciąg liczbowy - uwagi

W szkole definiowane były ciągi: arytmetyczny (o zadanej różnicy) i geometryczny (o zadanym ilorazie) - nie będę powtarzał definicji, ale proszę sobie je przypomnieć.
Ogólnie, o ciągach powiedzieć możemy niewiele.

Ciąg liczbowy - uwagi

W szkole definiowane były ciągi: arytmetyczny (o zadanej różnicy) i geometryczny (o zadanym ilorazie) - nie będę powtarzał definicji, ale proszę sobie je przypomnieć.
Ogólnie, o ciągach powiedzieć możemy niewiele. W zasadzie żaden wyraz ciągu nie musi zależeć od pozostałych.

Ciąg liczbowy - uwagi

W szkole definiowane były ciągi: arytmetyczny (o zadanej różnicy) i geometryczny (o zadanym ilorazie) - nie będę powtarzał definicji, ale proszę sobie je przypomnieć.
Ogólnie, o ciągach powiedzieć możemy niewiele. W zasadzie żaden wyraz ciągu nie musi zależeć od pozostałych. Obliczanie granicy takiego ciągu w punkcie nie ma sensu, gdyż albo ciąg nie jest określony w otoczeniu tego punktu, albo przyjmuje tam wartość, która naturalnie jest jego granicą w tym punkcie (jako jedyna wartość w otoczeniu). Jedynym nietrywialnym przypadkiem jest granica w nieskończoności.

Ciąg liczbowy - uwagi

W szkole definiowane były ciągi: arytmetyczny (o zadanej różnicy) i geometryczny (o zadanym ilorazie) - nie będę powtarzał definicji, ale proszę sobie je przypomnieć.
Ogólnie, o ciągach powiedzieć możemy niewiele. W zasadzie żaden wyraz ciągu nie musi zależeć od pozostałych. Obliczanie granicy takiego ciągu w punkcie nie ma sensu, gdyż albo ciąg nie jest określony w otoczeniu tego punktu, albo przyjmuje tam wartość, która naturalnie jest jego granicą w tym punkcie (jako jedyna wartość w otoczeniu). Jedynym nietrywialnym przypadkiem jest granica w nieskończoności.
Można ją definiować tak jak dla innych funkcji lub przez szczególną definicję dla ciągu z następnego slajdu (obie definicje są równoważne).

Granica ciągu liczbowego

Granica ciągu

Granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest liczba $g \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Granica ciągu liczbowego

Granica ciągu

Granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest liczba $g \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ a_n > M.$$

Granica ciągu liczbowego

Granica ciągu

Granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest liczba $g \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ a_n > M.$$

Granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ a_n < M.$$

Granica ciągu liczbowego - uwagi

O ciągu, który posiada granicę będącą liczbą rzeczywistą mówimy, że jest *zbieżny*. W innym wypadku jest *rozbieżny*.

Granica ciągu liczbowego - uwagi

O ciągu, który posiada granicę będącą liczbą rzeczywistą mówimy, że jest *zbieżny*. W innym wypadku jest *rozbieżny*.
Po co alternatywna definicja dla samego ciągu, skoro ciąg jest funkcją a granicę funkcji już zdefiniowaliśmy? Otóż czasem dzięki niej łatwiej jest udowodnić nieistnienie granicy odpowiedniej funkcji.

Twierdzenie Heinego

Zależność pomiędzy granicami ciągów oraz funkcji opisuje poniższe twierdzenie:

Twierdzenie Heinego

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu tego punktu (z możliwym wyjątkiem punktu x_0). $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \left\{ (\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \in D_f \wedge \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x_0) \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = g \right\}.$$

Twierdzenie Heinego

Zależność pomiędzy granicami ciągów oraz funkcji opisuje poniższe twierdzenie:

Twierdzenie Heinego

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu tego punktu (z możliwym wyjątkiem punktu x_0).
$\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \left\{ \left(\forall_{n\in\mathbb{N}}\, x_n \in D_f \wedge \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = g \right\}.$$

Twierdzenie to mówi, że w pewnym sensie badanie granic funkcji można sprowadzić do badania granic ciągów i odwrotnie.

Twierdzenie Heinego - granice w nieskończonościach

Twierdzenie Heinego

Jeśli funkcja f będzie określona w pewnym przedziale $(M, +\infty)$, $M \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \left\{ (\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \in D_f \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right\}.$$

Twierdzenie Heinego - granice w nieskończonościach

Twierdzenie Heinego

Jeśli funkcja f będzie określona w pewnym przedziale $(M, +\infty)$, $M \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \left\{ \left(\forall_{n\in\mathbb{N}}\, x_n \in D_f \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right\}.$$

Jeśli funkcja f będzie określona w pewnym przedziale $(-\infty, M)$, $M \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \left\{ \left(\forall_{n\in\mathbb{N}}\, x_n \in D_f \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right\}.$$

Twierdzenie Heinego - przykład

Zadanie

Udowodnić, że $\lim_{x \to \infty} \sin x$ nie istnieje.

Zadanie to staje się łatwiejsze właśnie dzięki twierdzeniu Heinego.

Twierdzenie Heinego - przykład

Zadanie

Udowodnić, że $\lim_{x \to \infty} \sin x$ nie istnieje.

Zadanie to staje się łatwiejsze właśnie dzięki twierdzeniu Heinego. Wystarczy bowiem wskazać 2 ciągi (a_n) i (b_n), których granicą jest $+\infty$, takie, że $\lim_{n \to \infty} \sin a_n \neq \lim_{n \to \infty} \sin b_n$.

Twierdzenie Heinego - przykład

Zadanie

Udowodnić, że $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nie istnieje.

Zadanie to staje się łatwiejsze właśnie dzięki twierdzeniu Heinego. Wystarczy bowiem wskazać 2 ciągi (a_n) i (b_n), których granicą jest $+\infty$, takie, że $\lim_{n\to\infty} \sin a_n \neq \lim_{n\to\infty} \sin b_n$. Rozważmy $a_n = n\pi$ - niewątpliwie dąży do nieskończoności.

Twierdzenie Heinego - przykład

Zadanie

Udowodnić, że $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nie istnieje.

Zadanie to staje się łatwiejsze właśnie dzięki twierdzeniu Heinego. Wystarczy bowiem wskazać 2 ciągi (a_n) i (b_n), których granicą jest $+\infty$, takie, że $\lim_{n\to\infty} \sin a_n \neq \lim_{n\to\infty} \sin b_n$. Rozważmy $a_n = n\pi$ - niewątpliwie dąży do nieskończoności. Natomiast

$\lim_{n\to\infty} \sin a_n =$

Twierdzenie Heinego - przykład

Zadanie

Udowodnić, że $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nie istnieje.

Zadanie to staje się łatwiejsze właśnie dzięki twierdzeniu Heinego. Wystarczy bowiem wskazać 2 ciągi (a_n) i (b_n), których granicą jest $+\infty$, takie, że $\lim_{n\to\infty} \sin a_n \neq \lim_{n\to\infty} \sin b_n$. Rozważmy $a_n = n\pi$ - niewątpliwie dąży do nieskończoności. Natomiast $\lim_{n\to\infty} \sin a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

Twierdzenie Heinego - przykład

Zadanie

Udowodnić, że $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nie istnieje.

Zadanie to staje się łatwiejsze właśnie dzięki twierdzeniu Heinego. Wystarczy bowiem wskazać 2 ciągi (a_n) i (b_n), których granicą jest $+\infty$, takie, że $\lim_{n\to\infty} \sin a_n \neq \lim_{n\to\infty} \sin b_n$. Rozważmy $a_n = n\pi$ - niewątpliwie dąży do nieskończoności. Natomiast $\lim_{n\to\infty} \sin a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Z kolei, jeśli $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, to b_n zmierza do nieskończoności, a $\lim_{n\to\infty} \sin b_n =$

Twierdzenie Heinego - przykład

Zadanie

Udowodnić, że $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nie istnieje.

Zadanie to staje się łatwiejsze właśnie dzięki twierdzeniu Heinego. Wystarczy bowiem wskazać 2 ciągi (a_n) i (b_n), których granicą jest $+\infty$, takie, że $\lim_{n\to\infty} \sin a_n \neq \lim_{n\to\infty} \sin b_n$. Rozważmy $a_n = n\pi$ - niewątpliwie dąży do nieskończoności. Natomiast $\lim_{n\to\infty} \sin a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Z kolei, jeśli $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, to b_n zmierza do nieskończoności, a $\lim_{n\to\infty} \sin b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

Twierdzenie Heinego - przykład

Zadanie

Udowodnić, że $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nie istnieje.

Zadanie to staje się łatwiejsze właśnie dzięki twierdzeniu Heinego. Wystarczy bowiem wskazać 2 ciągi (a_n) i (b_n), których granicą jest $+\infty$, takie, że $\lim_{n\to\infty} \sin a_n \neq \lim_{n\to\infty} \sin b_n$. Rozważmy $a_n = n\pi$ - niewątpliwie dąży do nieskończoności. Natomiast $\lim_{n\to\infty} \sin a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Z kolei, jeśli $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, to b_n zmierza do nieskończoności, a $\lim_{n\to\infty} \sin b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Jako, że $0 \neq 1$, to $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nie istnieje.

Twierdzenie Heinego - wniosek 1

W szczególności, twierdzenie Heinego mówi, że nie są nam potrzebne specjalne techniki obliczania granic ciągów - wystarczy, że użyjemy tych, które znamy dla funkcji zmiennych ciągłych.

Twierdzenie Heinego - wniosek 1

W szczególności, twierdzenie Heinego mówi, że nie są nam potrzebne specjalne techniki obliczania granic ciągów - wystarczy, że użyjemy tych, które znamy dla funkcji zmiennych ciągłych.

Wniosek

Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem, a f jest funkcją o dziedzinie rzeczywistej, taką, że $f(n) = a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ to $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.

Twierdzenie Heinego - wniosek 1

W szczególności, twierdzenie Heinego mówi, że nie są nam potrzebne specjalne techniki obliczania granic ciągów - wystarczy, że użyjemy tych, które znamy dla funkcji zmiennych ciągłych.

Wniosek

Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem, a f jest funkcją o dziedzinie rzeczywistej, taką, że $f(n) = a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = g$ to $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = g$.

Innymi słowy, do wzoru na n-ty wyraz ciągu zamiast n możemy podstawić x i badać zbieżność tak powstałej funkcji $f(x)$ przy x zmierzającym do $+\infty$.

Twierdzenie Heinego - wniosek 1

W szczególności, twierdzenie Heinego mówi, że nie są nam potrzebne specjalne techniki obliczania granic ciągów - wystarczy, że użyjemy tych, które znamy dla funkcji zmiennych ciągłych.

Wniosek

Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem, a f jest funkcją o dziedzinie rzeczywistej, taką, że $f(n) = a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$ to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Innymi słowy, do wzoru na n-ty wyraz ciągu zamiast n możemy podstawić x i badać zbieżność tak powstałej funkcji $f(x)$ przy x zmierzającym do $+\infty$. Jeśli granica ta istnieje, to granica ciągu jest taka sama.

Twierdzenie Heinego - przykład 1

Przejście z ciągów na funkcje umożliwia nam korzystanie z wielu narzędzi niedostępnych w przypadku dyskretnym np. z twierdzenia de L'Hospitala.

Twierdzenie Heinego - przykład 1

Przejście z ciągów na funkcje umożliwia nam korzystanie z wielu narzędzi niedostępnych w przypadku dyskretnym np. z twierdzenia de L'Hospitala.

Przykład

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Twierdzenie Heinego - przykład 1

Przejście z ciągów na funkcje umożliwia nam korzystanie z wielu narzędzi niedostępnych w przypadku dyskretnym np. z twierdzenia de L'Hospitala.

Przykład

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Z twierdzenia Heinego $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, o ile ta druga granica istnieje.

Twierdzenie Heinego - przykład 1

Przejście z ciągów na funkcje umożliwia nam korzystanie z wielu narzędzi niedostępnych w przypadku dyskretnym np. z twierdzenia de L'Hospitala.

Przykład

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Z twierdzenia Heinego $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, o ile ta druga granica istnieje. Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} =$$

Twierdzenie Heinego - przykład 1

Przejście z ciągów na funkcje umożliwia nam korzystanie z wielu narzędzi niedostępnych w przypadku dyskretnym np. z twierdzenia de L'Hospitala.

Przykład

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Z twierdzenia Heinego $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, o ile ta druga granica istnieje. Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Twierdzenie Heinego - przykład 1

Przejście z ciągów na funkcje umożliwia nam korzystanie z wielu narzędzi niedostępnych w przypadku dyskretnym np. z twierdzenia de L'Hospitala.

Przykład

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Z twierdzenia Heinego $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, o ile ta druga granica istnieje. Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Twierdzenie Heinego - przykład 2

Drugi przykład na tyle często będzie się nam przydawać, że sformułuję go w postaci wniosku.

Twierdzenie Heinego - przykład 2

Drugi przykład na tyle często będzie się nam przydawać, że sformułuję go w postaci wniosku.

Wniosek

Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej k zachodzi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$. W szczególności również $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$.

Twierdzenie Heinego - przykład 2

Drugi przykład na tyle często będzie się nam przydawać, że sformułuję go w postaci wniosku.

Wniosek

Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej k zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$. W szczególności również $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$.

Dowód: z twierdzenia Heinego $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{k}{x}}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, o ile ta druga granica istnieje.

Twierdzenie Heinego - przykład 2

Drugi przykład na tyle często będzie się nam przydawać, że sformułuję go w postaci wniosku.

Wniosek

Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej k zachodzi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$. W szczególności również $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$.

Dowód: z twierdzenia Heinego $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{k}{x}}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, o ile ta druga granica istnieje. Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{k}{x}} =$$

Twierdzenie Heinego - przykład 2

Drugi przykład na tyle często będzie się nam przydawać, że sformułuję go w postaci wniosku.

Wniosek

Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej k zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$. W szczególności również $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$.

Dowód: z twierdzenia Heinego $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{k}{x}}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, o ile ta druga granica istnieje. Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{k}{x}} = \left[\infty^0\right]$$

Twierdzenie Heinego - przykład 2

Drugi przykład na tyle często będzie się nam przydawać, że sformułuję go w postaci wniosku.

Wniosek

Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej k zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$. W szczególności również $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$.

Dowód: z twierdzenia Heinego $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{k}{x}}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, o ile ta druga granica istnieje. Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{k}{x}} = \left[\infty^0\right] = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{k}{x}\ln x}$$

Twierdzenie Heinego - przykład 2

Drugi przykład na tyle często będzie się nam przydawać, że sformułuję go w postaci wniosku.

Wniosek

Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej k zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$. W szczególności również $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$.

Dowód: z twierdzenia Heinego $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{k}{x}}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, o ile ta druga granica istnieje. Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{k}{x}} = \left[\infty^0\right] = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{k}{x}\ln x} \overset{H}{=} e^0 = 1.$$

Przedostatnia równość zachodzi na podstawie przykładu 1.

Twierdzenie Heinego - przykład 2

Wniosek ten można uogólnić.

Wniosek ten można uogólnić.

Wniosek uogólniony

Niech W będzie wielomianem takim, że $W(x) > 0$, dla $x > M$ ($M \in \mathbb{R}$), stopnia $k \in \mathbb{N}$. Wtedy zachodzi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{W(n)} = 1$.

Twierdzenie Heinego - przykład 2

Wniosek ten można uogólnić.

Wniosek uogólniony

Niech W będzie wielomianem takim, że $W(x) > 0$, dla $x > M$ ($M \in \mathbb{R}$), stopnia $k \in \mathbb{N}$. Wtedy zachodzi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{W(n)} = 1$.

Dowód: Wystarczy zauważyć, że skoro W jest stopnia k, to dla odpowiednio dużych n mamy $\sqrt[n]{n^{k-1}} \leqslant \sqrt[n]{W(n)} \leqslant \sqrt[n]{n^{k+1}}$ oraz, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{k-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{k+1}} = 1$ i skorzystać z twierdzenia o 3 funkcjach.

Wniosek z twierdzenia Heinego - kontrprzykład

Wniosek

Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem, a f jest funkcją o dziedzinie rzeczywistej, taką, że $f(n) = a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = g$ to $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = g$.

Wniosek z twierdzenia Heinego - kontrprzykład

Wniosek

Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem, a f jest funkcją o dziedzinie rzeczywistej, taką, że $f(n) = a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = g$ to $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = g$.

Na koniec, zauważmy jeszcze, że powyższy wniosek jest tylko implikacją, nie równoważnością. Z faktu, że granica pojedynczego ciągu istnieje, nie wynika istnienie granicy funkcji.

Wniosek z twierdzenia Heinego - kontrprzykład

Wniosek

Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem, a f jest funkcją o dziedzinie rzeczywistej, taką, że $f(n) = a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ to $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.

Na koniec, zauważmy jeszcze, że powyższy wniosek jest tylko implikacją, nie równoważnością. Z faktu, że granica pojedynczego ciągu istnieje, nie wynika istnienie granicy funkcji. Na przykład, jeśli rozważymy ciąg $a_n = \sin(n\pi)$, to łatwo zauważyć, że wszystkie jego wyrazy są równe 0.

Wniosek z twierdzenia Heinego - kontrprzykład

Wniosek

Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem, a f jest funkcją o dziedzinie rzeczywistej, taką, że $f(n) = a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = g$ to $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = g$.

Na koniec, zauważmy jeszcze, że powyższy wniosek jest tylko implikacją, nie równoważnością. Z faktu, że granica pojedynczego ciągu istnieje, nie wynika istnienie granicy funkcji. Na przykład, jeśli rozważymy ciąg $a_n = \sin(n\pi)$, to łatwo zauważyć, że wszystkie jego wyrazy są równe 0. Tymczasem $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \sin(x\pi)$ nie istnieje.