12a. Funkcje wielu zmiennych - ekstrema warunkowe

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Wstęp

W tym rozdziale będziemy badać funkcję $f : \mathbb{R}^2 \supset D_f \rightarrow \mathbb{R}$ zmiennych (x, y). Zakładamy o niej, że jest dwukrotnie różniczkowalna (chyba, że jest wyraźnie napisane inaczej). Wyniki tego rozdziału można uogólnić na sytuację wielowymiarową, ale wymagałoby to paru technicznych poprawek. Idee, na których opiera się szukanie ekstremów warunkowych i globalnych pozostają podobne do dwuwymiarowych w dowolnej liczbie wymiarów.

Wstęp - potencjalne zastosowania

Znajdowanie ekstremów lokalnych na $\mathbb{R}^n$ jest niezwykle użyteczne w zastosowaniach optymalizacyjnych. Jednakże, najczęściej mamy pewne ograniczenia narzucone na zmienne. Np. jeśli rozważamy firmę, której produkt opiera się na dwóch składnikach i obliczamy, w jakich ilościach te składniki trzeba nabyć, by zysk z produkcji był maksymalny, możemy zastosować metody podane w rozdziale poprzednim. Niestety, może się okazać, że optymalny wynik jest poza zasięgiem możliwości finansowych firmy (lub wcale nie istnieje - możliwe i prawdopodobne jest, że zysk będzie rósł w nieskończoność, gdy ilość zasobów do dyspozycji firmy będzie rosła do nieskończoności).

Wstęp - potencjalne zastosowania

Znajdowanie ekstremów lokalnych na $\mathbb{R}^n$ jest niezwykle użyteczne w zastosowaniach optymalizacyjnych. Jednakże, najczęściej mamy pewne ograniczenia narzucone na zmienne. Np. jeśli rozważamy firmę, której produkt opiera się na dwóch składnikach i obliczamy, w jakich ilościach te składniki trzeba nabyć, by zysk z produkcji był maksymalny, możemy zastosować metody podane w rozdziale poprzednim. Niestety, może się okazać, że optymalny wynik jest poza zasięgiem możliwości finansowych firmy (lub wcale nie istnieje - możliwe i prawdopodobne jest, że zysk będzie rósł w nieskończoność, gdy ilość zasobów do dyspozycji firmy będzie rosła do nieskończoności). Dlatego częściej stawianym pytaniem jest: jak zmaksymalizować (zminimalizować) pewną wielkość ekonomiczną pod warunkiem, że pewne założenia są spełnione. Szukamy wtedy tak zwanych *ekstremów warunkowych.*

Wstęp - opis zagadnienia

Rozważamy ogólną sytuację: poszukujemy ekstremów funkcji f na zbiorze $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej g.

Wstęp - opis zagadnienia

Rozważamy ogólną sytuację: poszukujemy ekstremów funkcji f na zbiorze $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej g.
Czasami z równania $g(x, y)$ możemy wyliczyć zależność x od y i w ten sposób przejść do wyznaczania ekstremum funkcji jednej zmiennej.

Wstęp - opis zagadnienia

Rozważamy ogólną sytuację: poszukujemy ekstremów funkcji f na zbiorze $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej g.
Czasami z równania $g(x, y)$ możemy wyliczyć zależność x od y i w ten sposób przejść do wyznaczania ekstremum funkcji jednej zmiennej. Jednakże, w ogólnej sytuacji jest to niemożliwe.
Wykorzystamy zatem metodę ogólną: tzw. *mnożniki Lagrange'a*.

Ekstrema warunkowe - przykład zagadnienia

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

Ekstrema warunkowe - przykład zagadnienia

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

Na razie przeformułujmy to zagadnienie na język ekstremów warunkowych, rozwiązanie zostawiając na później.

Ekstrema warunkowe - przykład zagadnienia

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

Na razie przeformułujmy to zagadnienie na język ekstremów warunkowych, rozwiązanie zostawiając na później. Szukamy faktycznie maksimum funkcji $u(x, y) = xy$ na pewnym zbiorze G.

Ekstrema warunkowe - przykład zagadnienia

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

Na razie przeformułujmy to zagadnienie na język ekstremów warunkowych, rozwiązanie zostawiając na później. Szukamy faktycznie maksimum funkcji $u(x, y) = xy$ na pewnym zbiorze G. Jaki to zbiór? Oczywiście, jest to zbiór koszyków, których koszt wynosi 12, czyli zbiór takich par (x, y), że $4x + y = 12$.

Ekstrema warunkowe - przykład zagadnienia

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

Na razie przeformułujmy to zagadnienie na język ekstremów warunkowych, rozwiązanie zostawiając na później. Szukamy faktycznie maksimum funkcji $u(x, y) = xy$ na pewnym zbiorze G. Jaki to zbiór? Oczywiście, jest to zbiór koszyków, których koszt wynosi 12, czyli zbiór takich par (x, y), że $4x + y = 12$. Dlatego, jeśli oznaczymy zbiór G jako $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ to g może mieć wzór np. $g(x, y) = 4x + y - 12$.

Ekstrema warunkowe - definicje

Zanim przejdziemy do rozwiązania problemu, musimy ściśle zdefiniować, czego właściwie szukamy.

Ekstrema warunkowe - definicje

Zanim przejdziemy do rozwiązania problemu, musimy ściśle zdefiniować, czego właściwie szukamy.

Ekstrema warunkowe

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *maksimum warunkowe* na zbiorze G jeśli $(x_0, y_0) \in G$ i

$$\exists_{\delta>0} \forall_{(x,y) \in U_\delta(x_0,y_0) \cap G \setminus \{x_0,y_0\}} f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Ekstrema warunkowe - definicje

Zanim przejdziemy do rozwiązania problemu, musimy ściśle zdefiniować, czego właściwie szukamy.

Ekstrema warunkowe

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *maksimum warunkowe* na zbiorze G jeśli $(x_0, y_0) \in G$ i

$$\exists_{\delta>0}\forall_{(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)\cap G\setminus\{x_0,y_0\}} f(x,y) < f(x_0,y_0).$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *minimum warunkowe* na zbiorze G jeśli $(x_0, y_0) \in G$ i

$$\exists_{\delta>0}\forall_{(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)\cap G\setminus\{x_0,y_0\}} f(x,y) > f(x_0,y_0).$$

Ekstrema warunkowe - definicje

Zanim przejdziemy do rozwiązania problemu, musimy ściśle zdefiniować, czego właściwie szukamy.

Ekstrema warunkowe

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *maksimum warunkowe* na zbiorze G jeśli $(x_0, y_0) \in G$ i

$$\exists_{\delta>0}\forall_{(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)\cap G\setminus\{x_0,y_0\}} f(x,y) < f(x_0,y_0).$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *minimum warunkowe* na zbiorze G jeśli $(x_0, y_0) \in G$ i

$$\exists_{\delta>0}\forall_{(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)\cap G\setminus\{x_0,y_0\}} f(x,y) > f(x_0,y_0).$$

Jak zwykle, jeśli w definicji pojawiają się słabe nierówności, możemy mówić o słabym minimum/maksimum warunkowym.

Ekstrema warunkowe - idea definicji

Idea definicji ekstremum warunkowego jest bardzo prosta: sprawdzamy, czy funkcja ma w danym punkcie wartość największą lub najmniejszą nie w całym swoim otoczeniu (jak w wypadku ekstremum lokalnego), ale w pewnym otoczeniu zawartym dodatkowo w wybranym zbiorze G.

Ekstrema warunkowe - idea definicji

Idea definicji ekstremum warunkowego jest bardzo prosta: sprawdzamy, czy funkcja ma w danym punkcie wartość największą lub najmniejszą nie w całym swoim otoczeniu (jak w wypadku ekstremum lokalnego), ale w pewnym otoczeniu zawartym dodatkowo w wybranym zbiorze G. Oczywiście, minimum lokalne zawsze będzie minimum warunkowym, o ile należy do zadanego zbioru G, ale nie na odwrót.

Ekstrema warunkowe - idea definicji

Idea definicji ekstremum warunkowego jest bardzo prosta: sprawdzamy, czy funkcja ma w danym punkcie wartość największą lub najmniejszą nie w całym swoim otoczeniu (jak w wypadku ekstremum lokalnego), ale w pewnym otoczeniu zawartym dodatkowo w wybranym zbiorze G. Oczywiście, minimum lokalne zawsze będzie minimum warunkowym, o ile należy do zadanego zbioru G, ale nie na odwrót.
Przykładowo, jeśli zbiorem G na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ jest prosta o równaniu $y = 0$, to funkcja $f(x, y) = x^2 - y$ na tej prostej ma postać po prostu $f(x, 0) = x^2 - 0 = x^2$.

Ekstrema warunkowe - idea definicji

Idea definicji ekstremum warunkowego jest bardzo prosta: sprawdzamy, czy funkcja ma w danym punkcie wartość największą lub najmniejszą nie w całym swoim otoczeniu (jak w wypadku ekstremum lokalnego), ale w pewnym otoczeniu zawartym dodatkowo w wybranym zbiorze G. Oczywiście, minimum lokalne zawsze będzie minimum warunkowym, o ile należy do zadanego zbioru G, ale nie na odwrót.
Przykładowo, jeśli zbiorem G na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ jest prosta o równaniu $y = 0$, to funkcja $f(x, y) = x^2 - y$ na tej prostej ma postać po prostu $f(x, 0) = x^2 - 0 = x^2$. Ze szkoły wiemy, że taka funkcja będzie mieć minimum warunkowe na G w $(0, 0)$.

Ekstrema warunkowe - idea definicji

Idea definicji ekstremum warunkowego jest bardzo prosta: sprawdzamy, czy funkcja ma w danym punkcie wartość największą lub najmniejszą nie w całym swoim otoczeniu (jak w wypadku ekstremum lokalnego), ale w pewnym otoczeniu zawartym dodatkowo w wybranym zbiorze G. Oczywiście, minimum lokalne zawsze będzie minimum warunkowym, o ile należy do zadanego zbioru G, ale nie na odwrót.
Przykładowo, jeśli zbiorem G na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ jest prosta o równaniu $y = 0$, to funkcja $f(x, y) = x^2 - y$ na tej prostej ma postać po prostu $f(x, 0) = x^2 - 0 = x^2$. Ze szkoły wiemy, że taka funkcja będzie mieć minimum warunkowe na G w $(0, 0)$. Nie jest to jednak minimum lokalne funkcji f na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, bo $f(0, 0) = 0$, a $f(0, y) = -y < 0$, gdy $y > 0$.

Ekstrema warunkowe - procedura mnożników Lagrange'a

By wyznaczyć ekstrema warunkowe, przeprowadzamy następującą procedurę:

Ekstrema warunkowe - procedura mnożników Lagrange'a

By wyznaczyć ekstrema warunkowe, przeprowadzamy następującą procedurę:

Procedura mnożników Lagrange'a - część 1

A. Tworzymy funkcję pomocniczą (tzw. *funkcję Lagrange'a*) daną wzorem $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. λ jest tutaj nową, pomocniczą zmienną zwaną *mnożnikiem Lagrange'a*.

Ekstrema warunkowe - procedura mnożników Lagrange'a

By wyznaczyć ekstrema warunkowe, przeprowadzamy następującą procedurę:

Procedura mnożników Lagrange'a - część 1

A. Tworzymy funkcję pomocniczą (tzw. *funkcję Lagrange'a*) daną wzorem $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$. λ jest tutaj nową, pomocniczą zmienną zwaną *mnożnikiem Lagrange'a*.
B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}.$$

Ekstrema warunkowe - procedura mnożników Lagrange'a

Procedura mnożników Lagrange'a - część 2

B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} .$$

Ekstrema warunkowe mogą istnieć tylko w punktach (x_0, y_0) takich, że dla pewnego λ_0, (x_0, y_0, λ_0) jest rozwiązaniem powyższego układu równań.

Ekstrema warunkowe - procedura mnożników Lagrange'a

Procedura mnożników Lagrange'a - część 3

C. Wyznaczamy tzw. *obrzeżony hesjan* dany wzorem:

$$HO(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & g'_x(x, y) & g'_y(x, y) \\ g'_x(x, y) & F''_{xx}(x, y, \lambda) & F''_{xy}(x, y, \lambda) \\ g'_y(x, y) & F''_{yx}(x, y, \lambda) & F''_{yy}(x, y, \lambda) \end{bmatrix}$$

Ekstrema warunkowe - procedura mnożników Lagrange'a

Procedura mnożników Lagrange'a - część 4

D. Obliczamy wyznacznik obrzeżonego hesjanu (czasem sam ten wyznacznik się nazywa obrzeżonym hesjanem) w punktach (x_0, y_0, λ_0), które są rozwiązaniami układu równań z punktu B.

Ekstrema warunkowe - procedura mnożników Lagrange'a

Procedura mnożników Lagrange'a - część 4

D. Obliczamy wyznacznik obrzeżonego hesjanu (czasem sam ten wyznacznik się nazywa obrzeżonym hesjanem) w punktach (x_0, y_0, λ_0), które są rozwiązaniami układu równań z punktu B. Jeśli $\det HO(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ to w (x_0, y_0) istnieje maksimum warunkowe, a jeśli $\det HO(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ to w (x_0, y_0) istnieje minimum warunkowe.

Ekstrema warunkowe - procedura mnożników Lagrange'a

Procedura mnożników Lagrange'a - część 4

D. Obliczamy wyznacznik obrzeżonego hesjanu (czasem sam ten wyznacznik się nazywa obrzeżonym hesjanem) w punktach (x_0, y_0, λ_0), które są rozwiązaniami układu równań z punktu B. Jeśli $\det HO(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ to w (x_0, y_0) istnieje maksimum warunkowe, a jeśli $\det HO(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ to w (x_0, y_0) istnieje minimum warunkowe. Jeśli $\det HO(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ to istnienie ekstremum warunkowego w (x_0, y_0) musimy rozstrzygnąć innym sposobem.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

Wracamy do przykładu z początku tej części wykładu:

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

Wracamy do przykładu z początku tej części wykładu:

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

Wiemy już, że szukamy ekstremów funkcji $u(x, y) = xy$ na zbiorze par (x, y) spełniających równanie $g(x, y) = 4x + y - 12 = 0$.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

Wracamy do przykładu z początku tej części wykładu:

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

Wiemy już, że szukamy ekstremów funkcji $u(x, y) = xy$ na zbiorze par (x, y) spełniających równanie $g(x, y) = 4x + y - 12 = 0$.
A. Tworzymy funkcję Lagrange'a daną wzorem
$F(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(4x + y - 12)$.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

$$F(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(4x + y - 12)$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

$F(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(4x + y - 12)$

B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = \\ \\ \end{cases}$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

$F(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(4x + y - 12)$

B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = \\ \end{cases}$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

$F(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(4x + y - 12)$

B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = \end{cases}$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

$F(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(4x + y - 12)$
B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 4x + y - 12 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

Zagadnienie

Rozważmy konsumenta, dla którego użyteczność z koszyka dwu towarów x, y jest dana wzorem $u(x, y) = xy$. Wiemy, że jednostka towaru x kosztuje 4, a jednostka towaru y kosztuje 1. Załóżmy, że konsument ma do wydania na te towary 12. Ile jednostek pierwszego, a ile drugiego towaru powinien kupić, by zmaksymalizować użyteczność koszyka tych dóbr?

$F(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(4x + y - 12)$
B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 4x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 6 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases} .$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 6 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Stąd jedynym kandydatem na ekstremum warunkowe jest punkt $(\frac{3}{2}, 6)$ dla $\lambda = -\frac{3}{2}$.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 6 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Stąd jedynym kandydatem na ekstremum warunkowe jest punkt $(\frac{3}{2}, 6)$ dla $\lambda = -\frac{3}{2}$.
C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 6 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Stąd jedynym kandydatem na ekstremum warunkowe jest punkt $(\frac{3}{2}, 6)$ dla $\lambda = -\frac{3}{2}$.
C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 0, \;\; F''_{xy}(x,y,\lambda) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 6 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Stąd jedynym kandydatem na ekstremum warunkowe jest punkt $(\frac{3}{2}, 6)$ dla $\lambda = -\frac{3}{2}$.
C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 0,\ F''_{xy}(x,y,\lambda) = 1,\ F''_{yx}(x,y,\lambda) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 6 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Stąd jedynym kandydatem na ekstremum warunkowe jest punkt $(\frac{3}{2}, 6)$ dla $\lambda = -\frac{3}{2}$.
C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 0,\ F''_{xy}(x,y,\lambda) = 1,\ F''_{yx}(x,y,\lambda) = 1,\ F''_{yy}(x,y,\lambda) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 6 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Stąd jedynym kandydatem na ekstremum warunkowe jest punkt $(\frac{3}{2}, 6)$ dla $\lambda = -\frac{3}{2}$.
C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 0,\ F''_{xy}(x,y,\lambda) = 1,\ F''_{yx}(x,y,\lambda) = 1,\ F''_{yy}(x,y,\lambda) = 0.$$

$$g'_x(x,y) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 6 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Stąd jedynym kandydatem na ekstremum warunkowe jest punkt $(\frac{3}{2}, 6)$ dla $\lambda = -\frac{3}{2}$.
C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 0,\ F''_{xy}(x,y,\lambda) = 1,\ F''_{yx}(x,y,\lambda) = 1,\ F''_{yy}(x,y,\lambda) = 0.$$

$$g'_x(x,y) = 4,\ g'_y(x,y) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = y + 4\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 6 \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Stąd jedynym kandydatem na ekstremum warunkowe jest punkt $(\frac{3}{2}, 6)$ dla $\lambda = -\frac{3}{2}$.
C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 0,\ F''_{xy}(x,y,\lambda) = 1,\ F''_{yx}(x,y,\lambda) = 1,\ F''_{yy}(x,y,\lambda) = 0.$$

$$g'_x(x,y) = 4,\ g'_y(x,y) = 1.$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

$$F''_{xx}(x,y,\lambda)=0,\ F''_{xy}(x,y,\lambda)=1,\ F''_{yx}(x,y,\lambda)=1,\ F''_{yy}(x,y,\lambda)=0.$$

$$g'_x(x,y)=4,\ g'_y(x,y)=1.$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

$$F''_{xx}(x,y,\lambda)=0,\ F''_{xy}(x,y,\lambda)=1,\ F''_{yx}(x,y,\lambda)=1,\ F''_{yy}(x,y,\lambda)=0.$$

$$g'_x(x,y)=4,\ g'_y(x,y)=1.$$

Zatem

$$HO(x,y,\lambda)=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 0,\ F''_{xy}(x,y,\lambda) = 1,\ F''_{yx}(x,y,\lambda) = 1,\ F''_{yy}(x,y,\lambda) = 0.$$

$$g'_x(x,y) = 4,\ g'_y(x,y) = 1.$$

Zatem

$$HO(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku, hesjan obrzeżony jest macierzą stałą, niezależną od punktu (x,y,λ) (ale zazwyczaj tak nie jest).

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

D. W szczególności

$$\det HO(\frac{3}{2}, 6, -\frac{3}{2}) = \det \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

D. W szczególności

$$\det HO(\frac{3}{2}, 6, -\frac{3}{2}) = \det \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4 + 4 = 8 > 0,$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 1

D. W szczególności

$$\det HO(\frac{3}{2}, 6, -\frac{3}{2}) = \det \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4 + 4 = 8 > 0,$$

tak więc punkt $(\frac{3}{2}, 6)$ jest maksimum warunkowym u na G, a co za tym idzie, rozwiązaniem naszego zagadnienia.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

Zadanie

Znaleźć ekstrema funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8y + 3$ przy warunku $4x^2 + y^2 = 36$.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

Zadanie

Znaleźć ekstrema funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8y + 3$ przy warunku $4x^2 + y^2 = 36$.

Szukamy ekstremów funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8y + 3$ na zbiorze par (x, y) spełniających równanie $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0$.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

Zadanie

Znaleźć ekstrema funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8y + 3$ przy warunku $4x^2 + y^2 = 36$.

Szukamy ekstremów funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8y + 3$ na zbiorze par (x, y) spełniających równanie $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0$.
A. Tworzymy funkcję Lagrange'a daną wzorem
$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 8y + 3 + \lambda(4x^2 + y^2 - 36)$.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 8y + 3 + \lambda(4x^2 + y^2 - 36)$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 8y + 3 + \lambda(4x^2 + y^2 - 36)$
B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = \\ \\ \end{cases}$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 8y + 3 + \lambda(4x^2 + y^2 - 36)$
B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = \\ \end{cases}$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 8y + 3 + \lambda(4x^2 + y^2 - 36)$
B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = \end{cases}$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 8y + 3 + \lambda(4x^2 + y^2 - 36)$
B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 8y + 3 + \lambda(4x^2 + y^2 - 36)$
B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

$2x + 8x\lambda = 0 \Rightarrow$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 8y + 3 + \lambda(4x^2 + y^2 - 36)$
B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases}.$$

$2x + 8x\lambda = 0 \Rightarrow x(1 + 4\lambda) = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee \lambda = -\frac{1}{4}).$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 8y + 3 + \lambda(4x^2 + y^2 - 36)$
B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

$2x + 8x\lambda = 0 \Rightarrow x(1 + 4\lambda) = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee \lambda = -\frac{1}{4})$.
Jeśli $x = 0$, to z trzeciego równania $y^2 - 36 = 0$, czyli $y = 6$ lub $y = -6$. W obu wypadkach łatwo obliczamy λ z drugiego równania.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 8y + 3 + \lambda(4x^2 + y^2 - 36)$
B. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases}.$$

$2x + 8x\lambda = 0 \Rightarrow x(1 + 4\lambda) = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee \lambda = -\frac{1}{4})$.
Jeśli $x = 0$, to z trzeciego równania $y^2 - 36 = 0$, czyli $y = 6$ lub $y = -6$. W obu wypadkach łatwo obliczamy λ z drugiego równania. Otrzymujemy następujących kandydatów na ekstrema warunkowe: $(0, 6)$, przy $\lambda = -\frac{1}{3}$ lub $(0, -6)$ przy $\lambda = -\frac{5}{3}$.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

W drugim przypadku, jeśli $\lambda = -\frac{1}{4}$, to z drugiego równania $y = \frac{16}{3}$ i z trzeciego równania $x = \pm\frac{\sqrt{17}}{3}$.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

W drugim przypadku, jeśli $\lambda = -\frac{1}{4}$, to z drugiego równania $y = \frac{16}{3}$ i z trzeciego równania $x = \pm\frac{\sqrt{17}}{3}$. Otrzymujemy następujących kandydatów na ekstrema warunkowe: $(\frac{\sqrt{17}}{3}, \frac{16}{3})$ i $(-\frac{\sqrt{17}}{3}, \frac{16}{3})$ przy $\lambda = -\frac{1}{4}$.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

W drugim przypadku, jeśli $\lambda = -\frac{1}{4}$, to z drugiego równania $y = \frac{16}{3}$ i z trzeciego równania $x = \pm\frac{\sqrt{17}}{3}$. Otrzymujemy następujących kandydatów na ekstrema warunkowe: $(\frac{\sqrt{17}}{3}, \frac{16}{3})$ i $(-\frac{\sqrt{17}}{3}, \frac{16}{3})$ przy $\lambda = -\frac{1}{4}$. W sumie zatem mamy czterech kandydatów.

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 2 + 8\lambda,\ F''_{xy}(x,y,\lambda) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 2 + 8\lambda,\ \ F''_{xy}(x,y,\lambda) = 0,\ \ F''_{yx}(x,y,\lambda) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 2 + 8\lambda,\ F''_{xy}(x,y,\lambda) = 0,\ F''_{yx}(x,y,\lambda) = 0,$$

$$F''_{yy}(x,y,\lambda) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 2 + 8\lambda,\ \ F''_{xy}(x,y,\lambda) = 0,\ \ F''_{yx}(x,y,\lambda) = 0,$$

$$F''_{yy}(x,y,\lambda) = 2 + 2\lambda, g'_x(x,y) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 2 + 8\lambda,\ \ F''_{xy}(x,y,\lambda) = 0,\ \ F''_{yx}(x,y,\lambda) = 0,$$

$$F''_{yy}(x,y,\lambda) = 2 + 2\lambda, g'_x(x,y) = 8x,\ \ g'_y(x,y) =$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 2x + 8x\lambda = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} .$$

C. Obliczamy:

$$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 2 + 8\lambda, \;\; F''_{xy}(x,y,\lambda) = 0, \;\; F''_{yx}(x,y,\lambda) = 0,$$

$$F''_{yy}(x,y,\lambda) = 2 + 2\lambda, g'_x(x,y) = 8x, \;\; g'_y(x,y) = 2y.$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

Zatem

$$HO(x,y,\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & 8x & 2y \\ 8x & 2+8\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2+2\lambda \end{bmatrix}$$

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

Zatem

$$HO(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 8x & 2y \\ 8x & 2+8\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2+2\lambda \end{bmatrix}$$

D. Łatwo sprawdzić, że $\det HO(0,6,-\frac{1}{3}) > 0$ i $\det HO(0,-6,-\frac{5}{3}) > 0$, natomiast $\det HO(\frac{\sqrt{17}}{3},\frac{16}{3},-\frac{1}{4}) < 0$ i $\det HO(-\frac{\sqrt{17}}{3},\frac{16}{3},-\frac{1}{4}) < 0$,

Procedura mnożników Lagrange'a - przykład 2

Zatem

$$HO(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 8x & 2y \\ 8x & 2+8\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2+2\lambda \end{bmatrix}$$

D. Łatwo sprawdzić, że $\det HO(0,6,-\frac{1}{3}) > 0$ i $\det HO(0,-6,-\frac{5}{3}) > 0$, natomiast $\det HO(\frac{\sqrt{17}}{3},\frac{16}{3},-\frac{1}{4}) < 0$ i $\det HO(-\frac{\sqrt{17}}{3},\frac{16}{3},-\frac{1}{4}) < 0$, więc $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8y + 3$ przy warunku $4x^2 + y^2 = 36$ ma maksima warunkowe w $(0,6)$ i $(0,-6)$ oraz minima warunkowe w $(\frac{\sqrt{17}}{3},\frac{16}{3})$ i $(-\frac{\sqrt{17}}{3},\frac{16}{3})$.