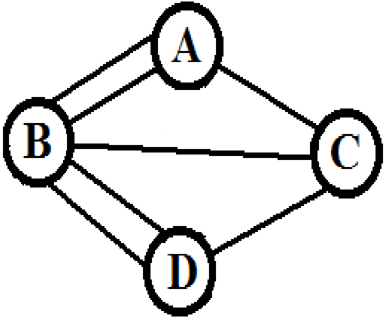
5a. Grafy eulerowskie i hamiltonowskie

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

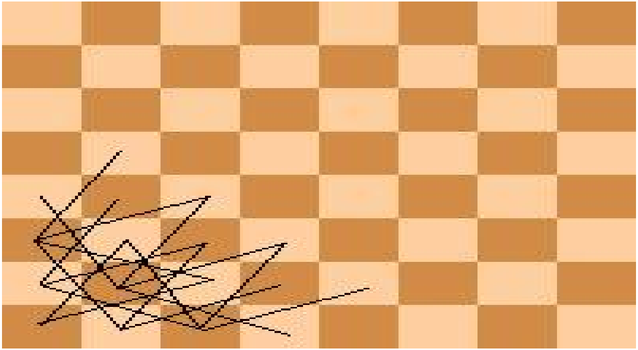
Przykładowe problemy

Pierwszy znany problem teorii grafów: zagadnienie mostów królewieckich rozwiązane przez Leonharda Eulera (1736). Królewiec - miasto leżące na dwu brzegach i dwu wyspach rzeki Pregoły, połączonych w czasach Eulera siedmioma mostami jak na rysunku poniżej (źródło:Wikipedia). Czy da się pójść na spacer po całym mieście, tak by po każdym moście przejść dokładnie raz?



Przykładowe problemy

Alternatywny problem skoczka szachowego: czy da się skoczkiem obejść szachownicę, by tylko raz przejść przez każde połączenie pomiędzy polami (pola są połączone w ten sposób, by z jednego dało się przejść na drugie jednym ruchem skoczka), jak na rysunku poniżej.



Bardziej praktyczne problemy eulerowskie

Bardziej praktyczne problemy eulerowskie

- Problem listonosza - jak, roznosząc pocztę, przejść po każdej ulicy swego rewiru dokładnie raz (w ten sposób tworząc najkrótszą trasę).

Bardziej praktyczne problemy eulerowskie

- Problem listonosza - jak, roznosząc pocztę, przejść po każdej ulicy swego rewiru dokładnie raz (w ten sposób tworząc najkrótszą trasę).
- Problem sprzątania: jak zaprogramować robota sprzątającego korytarze jakiegoś budynku, by przez każdy korytarz przejeżdżał dokładnie raz (znów najkrótsza trasa daje optymalizację kosztów).

Bardziej praktyczne problemy eulerowskie

- Problem listonosza - jak, roznosząc pocztę, przejść po każdej ulicy swego rewiru dokładnie raz (w ten sposób tworząc najkrótszą trasę).
- Problem sprzątania: jak zaprogramować robota sprzątającego korytarze jakiegoś budynku, by przez każdy korytarz przejeżdżał dokładnie raz (znów najkrótsza trasa daje optymalizację kosztów).
- Wiele zagadek podobnych do tych na poprzednich slajdach pojawiło się w grach komputerowych np. Dragon Age: Inquisition.

Definicje

Cykl Eulera

Cyklem Eulera nazywamy zamkniętą drogę przechodzącą przez każdą krawędź grafu dokładnie raz.

Definicje

Cykl Eulera

Cyklem Eulera nazywamy zamkniętą drogę przechodzącą przez każdą krawędź grafu dokładnie raz.

Zwróćmy uwagę, że formalnie cykl Eulera nie musi być cyklem w sensie naszej wcześniejszej definicji (bo wierzchołki po drodze mogą się powtarzać). Natomiast musi być drogą prostą.

Droga Eulera

Drogą Eulera nazywamy drogę prostą zawierającą wszystkie krawędzie grafu.

Definicje

Cykl Eulera

Cyklem Eulera nazywamy zamkniętą drogę przechodzącą przez każdą krawędź grafu dokładnie raz.

Zwróćmy uwagę, że formalnie cykl Eulera nie musi być cyklem w sensie naszej wcześniejszej definicji (bo wierzchołki po drodze mogą się powtarzać). Natomiast musi być drogą prostą.

Droga Eulera

Drogą Eulera nazywamy drogę prostą zawierającą wszystkie krawędzie grafu.

Graf eulerowski

Grafem eulerowskim nazywamy graf posiadający cykl Eulera.

Charakterystyka grafów eulerowskich

Wszystkie wcześniejsze zagadnienia można sprowadzić do znalezienia drogi lub cyklu Eulera w pewnym grafie. Jak łatwo się domyślić, nie zawsze droga Eulera w grafie istnieje (nie mówiąc już o cyklu) - przykładem jest 4-klika K_4. Zanim zaczniemy szukać algorytmu rozwiązującego problem, należy wiedzieć jak rozstrzygnąć, czy dla bardziej skomplikowanych grafów nasz problem w ogóle ma rozwiązanie?

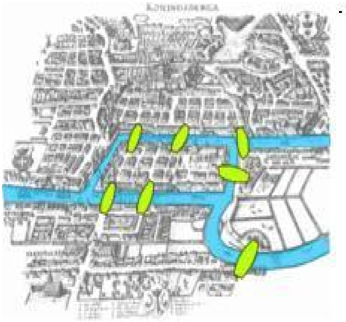
Charakterystyka grafów eulerowskich

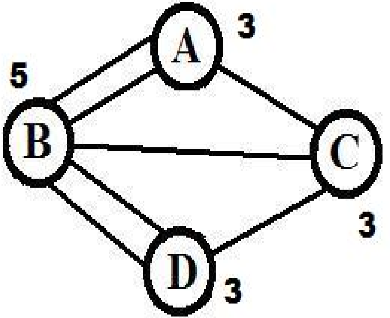
Wszystkie wcześniejsze zagadnienia można sprowadzić do znalezienia drogi lub cyklu Eulera w pewnym grafie. Jak łatwo się domyślić, nie zawsze droga Eulera w grafie istnieje (nie mówiąc już o cyklu) - przykładem jest 4-klika K_4. Zanim zaczniemy szukać algorytmu rozwiązującego problem, należy wiedzieć jak rozstrzygnąć, czy dla bardziej skomplikowanych grafów nasz problem w ogóle ma rozwiązanie?

Twierdzenie Eulera

Spójny graf $G = (V, E)$ jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty. Graf G ma drogę Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie dwa lub zero wierzchołków stopnia nieparzystego.
W wypadku grafów niespójnych, jeśli przynajmniej dwie składowe posiadają krawędzie, to droga Eulera nie istnieje.

Zastosowanie - problem mostów królewieckich





Jak widać, graf odpowiadający spacerowi po mostach królewieckich ma 4 wierzchołki nieparzystego stopnia, więc nie może istnieć w nim cykl, ani nawet droga Eulera. Zatem zadany spacer jest niemożliwy.

Zastosowanie - alternatywny problem skoczka szachowego

W tym problemie wierzchołkami grafu były pola szachowe, a krawędzie łączyły pola, pomiędzy którymi skoczek mógł wykonać ruch.

Zastosowanie - alternatywny problem skoczka szachowego

W tym problemie wierzchołkami grafu były pola szachowe, a krawędzie łączyły pola, pomiędzy którymi skoczek mógł wykonać ruch.
Zauważmy, że z pól sąsiadujących z narożnikiem szachownicy skoczki mogą wykonać 3 możliwe ruchy.

Zastosowanie - alternatywny problem skoczka szachowego

W tym problemie wierzchołkami grafu były pola szachowe, a krawędzie łączyły pola, pomiędzy którymi skoczek mógł wykonać ruch.
Zauważmy, że z pól sąsiadujących z narożnikiem szachownicy skoczki mogą wykonać 3 możliwe ruchy.
Ponieważ takich pól jest 8, graf dla tego problemu zawiera 8 wierzchołków stopnia 3, a więc nie da się przejść dokładnie raz wszystkich krawędzi tego grafu.

Wnioski dla innych grafów

Wnioski dla innych grafów

- Dla antyklik pytanie o cykl bądź drogę Eulera nie ma sensu (bo grafy te nie mają krawędzi), ale formalnie antykliki są eulerowskie, bo droga pusta, składająca się z 0 krawędzi przechodzi przez wszystkie krawędzie.

Wnioski dla innych grafów

- Dla antyklik pytanie o cykl bądź drogę Eulera nie ma sensu (bo grafy te nie mają krawędzi), ale formalnie antykliki są eulerowskie, bo droga pusta, składająca się z 0 krawędzi przechodzi przez wszystkie krawędzie.
- Kliki K_n są eulerowskie tylko dla n nieparzystych.

Wnioski dla innych grafów

- Dla antyklik pytanie o cykl bądź drogę Eulera nie ma sensu (bo grafy te nie mają krawędzi), ale formalnie antykliki są eulerowskie, bo droga pusta, składająca się z 0 krawędzi przechodzi przez wszystkie krawędzie.
- Kliki K_n są eulerowskie tylko dla n nieparzystych.
- Grafy-drogi zawsze mają drogę Eulera, ale nigdy cykli Eulera. Grafy-cykle są eulerowskie.

Wnioski dla innych grafów

- Dla antyklik pytanie o cykl bądź drogę Eulera nie ma sensu (bo grafy te nie mają krawędzi), ale formalnie antykliki są eulerowskie, bo droga pusta, składająca się z 0 krawędzi przechodzi przez wszystkie krawędzie.
- Kliki K_n są eulerowskie tylko dla n nieparzystych.
- Grafy-drogi zawsze mają drogę Eulera, ale nigdy cykli Eulera. Grafy-cykle są eulerowskie.
- Spośród grafów platońskich tylko graf ośmiościanu jest eulerowski.

Wnioski dla innych grafów

- Dla antyklik pytanie o cykl bądź drogę Eulera nie ma sensu (bo grafy te nie mają krawędzi), ale formalnie antykliki są eulerowskie, bo droga pusta, składająca się z 0 krawędzi przechodzi przez wszystkie krawędzie.
- Kliki K_n są eulerowskie tylko dla n nieparzystych.
- Grafy-drogi zawsze mają drogę Eulera, ale nigdy cykli Eulera. Grafy-cykle są eulerowskie.
- Spośród grafów platońskich tylko graf ośmiościanu jest eulerowski.
- Graf Petersena nie jest eulerowski.

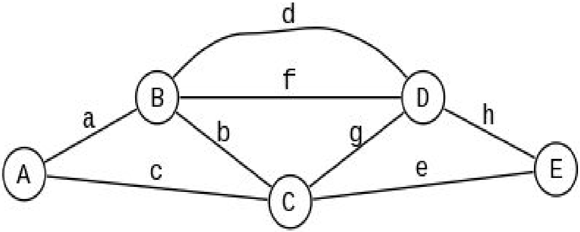
Wnioski dla innych grafów

- Dla antyklik pytanie o cykl bądź drogę Eulera nie ma sensu (bo grafy te nie mają krawędzi), ale formalnie antykliki są eulerowskie, bo droga pusta, składająca się z 0 krawędzi przechodzi przez wszystkie krawędzie.
- Kliki K_n są eulerowskie tylko dla n nieparzystych.
- Grafy-drogi zawsze mają drogę Eulera, ale nigdy cykli Eulera. Grafy-cykle są eulerowskie.
- Spośród grafów platońskich tylko graf ośmiościanu jest eulerowski.
- Graf Petersena nie jest eulerowski.
- Drzewa nie są eulerowskie.

Wnioski dla innych grafów

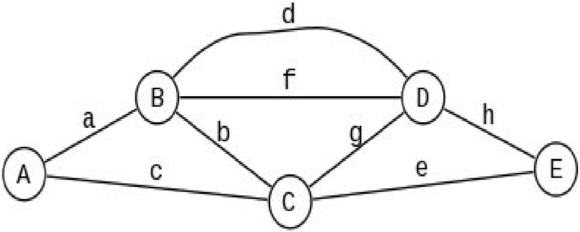
- Dla antyklik pytanie o cykl bądź drogę Eulera nie ma sensu (bo grafy te nie mają krawędzi), ale formalnie antykliki są eulerowskie, bo droga pusta, składająca się z 0 krawędzi przechodzi przez wszystkie krawędzie.
- Kliki K_n są eulerowskie tylko dla n nieparzystych.
- Grafy-drogi zawsze mają drogę Eulera, ale nigdy cykli Eulera. Grafy-cykle są eulerowskie.
- Spośród grafów platońskich tylko graf ośmiościanu jest eulerowski.
- Graf Petersena nie jest eulerowski.
- Drzewa nie są eulerowskie.
- Grafy zawierające mosty nie są eulerowskie (acz mogą mieć drogę Eulera).

Potrzeba systematycznego podejścia



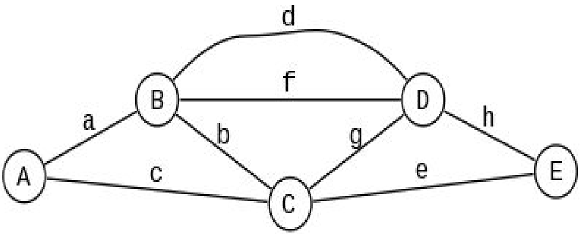
Nawet jeśli wiemy, że w danym grafie istnieje droga lub cykl Eulera, to nie zawsze się da taką drogę znaleźć na chybił-trafił dopisując kolejne krawędzie dla naszej drogi. Np. powyższy graf jest eulerowski, ale jeśli spróbujemy wygenerować cykl Eulera startując z wierzchołka B i wybierając kolejno krawędzie:

Potrzeba systematycznego podejścia



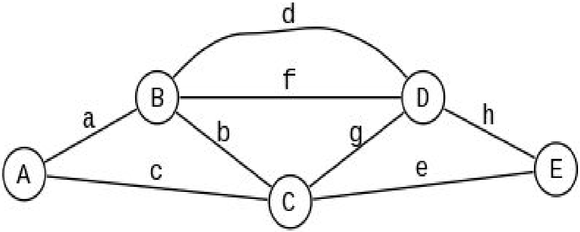
Nawet jeśli wiemy, że w danym grafie istnieje droga lub cykl Eulera, to nie zawsze się da taką drogę znaleźć na chybił-trafił dopisując kolejne krawędzie dla naszej drogi. Np. powyższy graf jest eulerowski, ale jeśli spróbujemy wygenerować cykl Eulera startując z wierzchołka B i wybierając kolejno krawędzie:
d,

Potrzeba systematycznego podejścia



Nawet jeśli wiemy, że w danym grafie istnieje droga lub cykl Eulera, to nie zawsze się da taką drogę znaleźć na chybił-trafił dopisując kolejne krawędzie dla naszej drogi. Np. powyższy graf jest eulerowski, ale jeśli spróbujemy wygenerować cykl Eulera startując z wierzchołka B i wybierając kolejno krawędzie:
d, f,

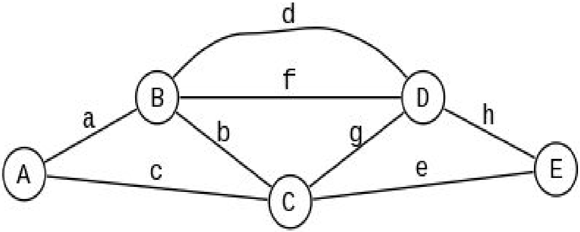
Potrzeba systematycznego podejścia



Nawet jeśli wiemy, że w danym grafie istnieje droga lub cykl Eulera, to nie zawsze się da taką drogę znaleźć na chybił-trafił dopisując kolejne krawędzie dla naszej drogi. Np. powyższy graf jest eulerowski, ale jeśli spróbujemy wygenerować cykl Eulera startując z wierzchołka B i wybierając kolejno krawędzie:

d, f, b,

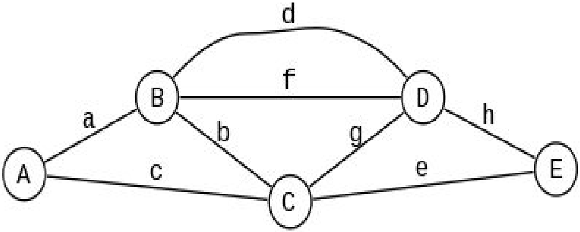
Potrzeba systematycznego podejścia



Nawet jeśli wiemy, że w danym grafie istnieje droga lub cykl Eulera, to nie zawsze się da taką drogę znaleźć na chybił-trafił dopisując kolejne krawędzie dla naszej drogi. Np. powyższy graf jest eulerowski, ale jeśli spróbujemy wygenerować cykl Eulera startując z wierzchołka B i wybierając kolejno krawędzie:

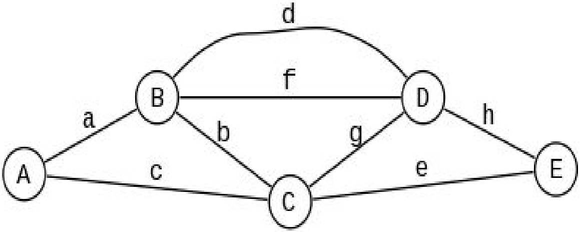
d, f, b, c,

Potrzeba systematycznego podejścia



Nawet jeśli wiemy, że w danym grafie istnieje droga lub cykl Eulera, to nie zawsze się da taką drogę znaleźć na chybił-trafił dopisując kolejne krawędzie dla naszej drogi. Np. powyższy graf jest eulerowski, ale jeśli spróbujemy wygenerować cykl Eulera startując z wierzchołka B i wybierając kolejno krawędzie:
d, f, b, c, a;

Potrzeba systematycznego podejścia



Nawet jeśli wiemy, że w danym grafie istnieje droga lub cykl Eulera, to nie zawsze się da taką drogę znaleźć na chybił-trafił dopisując kolejne krawędzie dla naszej drogi. Np. powyższy graf jest eulerowski, ale jeśli spróbujemy wygenerować cykl Eulera startując z wierzchołka B i wybierając kolejno krawędzie:

d, f, b, c, a;

to znajdziemy się w pułapce: drogi tej nie można kontynuować, a nie przeszliśmy jeszcze całego grafu.

Algorytm Fleury'ego - część I

Algorytm Fleury'ego

Dane: Graf $G = (V(G), E(G))$, spełniający założenia twierdzenia Eulera.

Zmienne: ES - ciąg krawędzi.

Algorytm Fleury'ego - część I

Algorytm Fleury'ego

Dane: Graf $G = (V(G), E(G))$, spełniający założenia twierdzenia Eulera.
Zmienne: ES - ciąg krawędzi.

- I. Wybierz dowolny wierzchołek v nieparzystego stopnia, jeśli istnieje. W przeciwnym wypadku wybierz dowolny wierzchołek v. Niech $ES = \emptyset$.

Algorytm Fleury'ego - część I

Algorytm Fleury'ego

Dane: Graf $G = (V(G), E(G))$, spełniający założenia twierdzenia Eulera.
Zmienne: ES - ciąg krawędzi.

- I. Wybierz dowolny wierzchołek v nieparzystego stopnia, jeśli istnieje. W przeciwnym wypadku wybierz dowolny wierzchołek v. Niech $ES = \emptyset$.
- II. Jeśli z wierzchołka v nie wychodzi ani jedna krawędź $\longrightarrow$ STOP.

Algorytm Fleury'ego - część I

Algorytm Fleury'ego

Dane: Graf $G = (V(G), E(G))$, spełniający założenia twierdzenia Eulera.

Zmienne: ES - ciąg krawędzi.

- I. Wybierz dowolny wierzchołek v nieparzystego stopnia, jeśli istnieje. W przeciwnym wypadku wybierz dowolny wierzchołek v. Niech $ES = \emptyset$.
- II. Jeśli z wierzchołka v nie wychodzi ani jedna krawędź $\longrightarrow$ STOP.
- III. Jeśli pozostała dokładnie jedna krawędź wychodząca z v, np. vw, wtedy usuń vw z $E(G)$ oraz v z $V(G)$ i przejdź do kroku V.

Algorytm Fleury'ego - część I

Algorytm Fleury'ego

Dane: Graf $G = (V(G), E(G))$, spełniający założenia twierdzenia Eulera.

Zmienne: ES - ciąg krawędzi.

- I. Wybierz dowolny wierzchołek v nieparzystego stopnia, jeśli istnieje. W przeciwnym wypadku wybierz dowolny wierzchołek v. Niech $ES = \emptyset$.
- II. Jeśli z wierzchołka v nie wychodzi ani jedna krawędź $\longrightarrow$ STOP.
- III. Jeśli pozostała dokładnie jedna krawędź wychodząca z v, np. vw, wtedy usuń vw z $E(G)$ oraz v z $V(G)$ i przejdź do kroku V.
- IV. Jeśli została więcej niż jedna krawędź wychodząca z wierzchołka v, wybierz krawędź vw, która nie jest mostem. Następnie usuń vw z $E(G)$.

Algorytm Fleury'ego - część II

Algorytm Fleury'ego

Algorytm Fleury'ego - część II

Algorytm Fleury'ego

- V. Dołącz vw na końcu ciągu ES, zastąp v wierzchołkiem w i przejdź do kroku II.

Algorytm Fleury'ego - część II

Algorytm Fleury'ego

- V. Dołącz vw na końcu ciągu ES, zastąp v wierzchołkiem w i przejdź do kroku II.
- VI. **Rezultat**: ES to droga lub cykl Eulera.

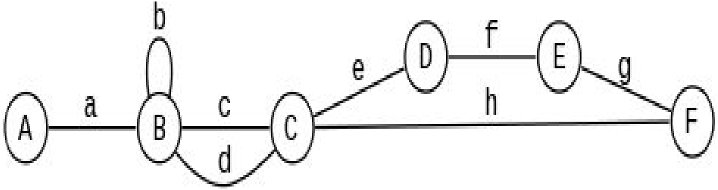
Algorytm Fleury'ego - część II

Algorytm Fleury'ego

- V. Dołącz vw na końcu ciągu ES, zastąp v wierzchołkiem w i przejdź do kroku II.
- VI. **Rezultat**: ES to droga lub cykl Eulera.

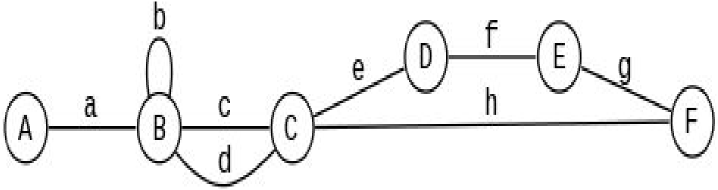
Tłumacząc na ludzki: zawsze startujemy z wierzchołka nieparzystego stopnia - jeśli takiego nie ma, to z dowolnego i w kolejnych krokach wybieramy dowolne krawędzie przedłużające naszą drogę, pod warunkiem, że nie są mostami w grafie, który tworzą niewybrane jeszcze krawędzie (chyba, że to jest jedyna możliwość wyboru, czyli jedyna krawędź wychodząca z wierzchołka, do którego ostatnio dotarliśmy).

Algorytm Fleury'ego - przykład



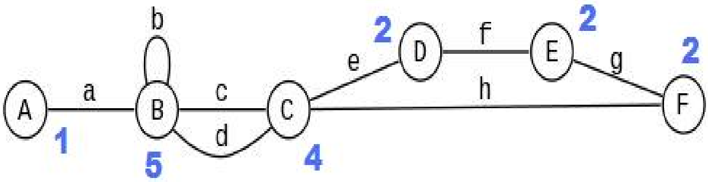
Spróbujemy zastosować algorytm Fleury'ego dla powyższego grafu. Przedstawię tutaj sposób postępowania przyjęty w ramach tego kursu (niestety, poza znajomością algorytmu na sprawdzianie/egzaminie trzeba też swoją znajomość przedstawić tak, by prowadzący zajęcia zrozumiał - dlatego ustandaryzowany opis jest tu najlepszy.)

Algorytm Fleury'ego - przykład



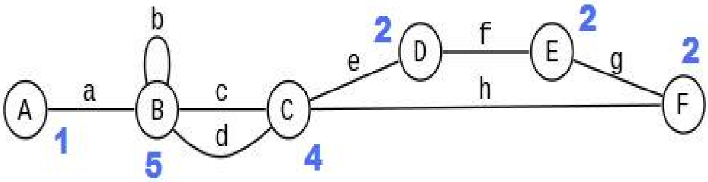
Spróbujemy zastosować algorytm Fleury'ego dla powyższego grafu. Przedstawię tutaj sposób postępowania przyjęty w ramach tego kursu (niestety, poza znajomością algorytmu na sprawdzianie/egzaminie trzeba też swoją znajomość przedstawić tak, by prowadzący zajęcia zrozumiał - dlatego ustandaryzowany opis jest tu najlepszy.)
Zaczynamy od sprawdzenia, czy jest ten graf dopuszcza cykl lub drogę Eulera. W tym celu obliczamy i zaznaczamy na grafie stopnie wszystkich wierzchołków.

Algorytm Fleury'ego - przykład



Jak widać, tylko wierzchołki A i B są stopnia nieparzystego, więc chociaż w grafie nie ma cyklu Eulera, znajdziemy w nim drogę Eulera.

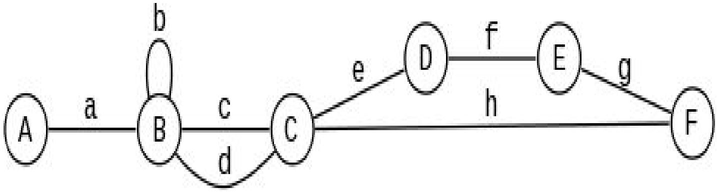
Algorytm Fleury'ego - przykład



Jak widać, tylko wierzchołki A i B są stopnia nieparzystego, więc chociaż w grafie nie ma cyklu Eulera, znajdziemy w nim drogę Eulera. Działanie algorytmu zapisujemy w takiej tabeli:

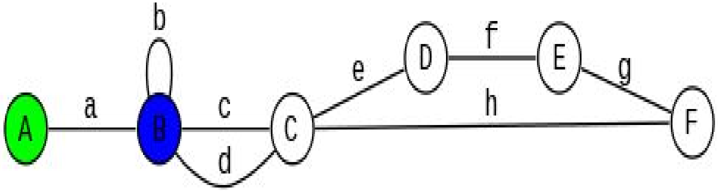
Nr etapu	wybór	możliwe alternatywy	skonstruowana droga
1			
2			

Algorytm Fleury'ego - krok 1



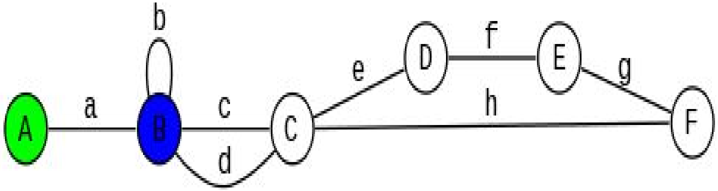
W pierwszym kroku wybieramy punkt początkowy. Zgodnie z algorytmem Fleury'ego może być to tylko wierzchołek o nieparzystym stopniu.

Algorytm Fleury'ego - krok 1



W pierwszym kroku wybieramy punkt początkowy. Zgodnie z algorytmem Fleury'ego może być to tylko wierzchołek o nieparzystym stopniu. Z możliwych dwóch punktów wybieramy np. A, a w tabeli odnotowujemy, że B było możliwą alternatywą.

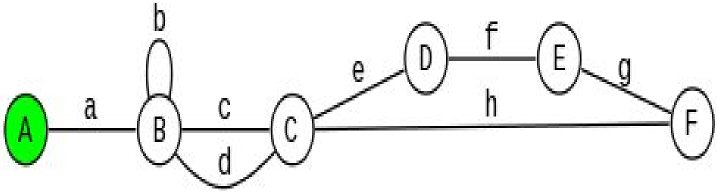
Algorytm Fleury'ego - krok 1



W pierwszym kroku wybieramy punkt początkowy. Zgodnie z algorytmem Fleury'ego może być to tylko wierzchołek o nieparzystym stopniu. Z możliwych dwóch punktów wybieramy np. A, a w tabeli odnotowujemy, że B było możliwą alternatywą.

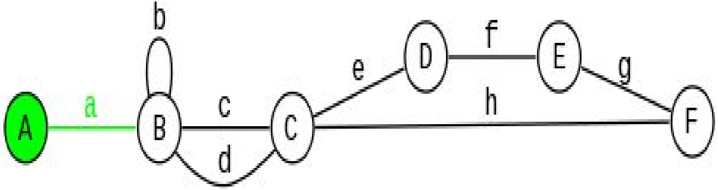
Nr etapu	wybór	możliwe alternatywy	skonstruowana droga
1	A	B	$\emptyset$

Algorytm Fleury'ego - krok 2



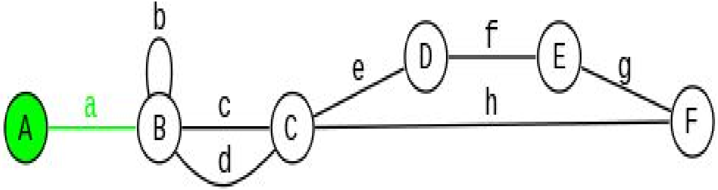
Skoro zaczęliśmy w punkcie A, zgodnie z punktem III algorytmu Fleury'ego, musimy wybrać jedyną krawędź z tego punktu wychodzącą, czyli a, która doprowadzi nas do wierzchołka B.

Algorytm Fleury'ego - krok 2



Skoro zaczęliśmy w punkcie A, zgodnie z punktem III algorytmu Fleury'ego, musimy wybrać jedyną krawędź z tego punktu wychodzącą, czyli a, która doprowadzi nas do wierzchołka B. Zaznaczamy wybór w drugim wierszu tabeli

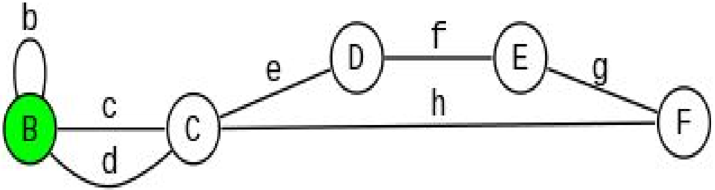
Algorytm Fleury'ego - krok 2



Skoro zaczęliśmy w punkcie A, zgodnie z punktem III algorytmu Fleury'ego, musimy wybrać jedyną krawędź z tego punktu wychodzącą, czyli a, która doprowadzi nas do wierzchołka B. Zaznaczamy wybór w drugim wierszu tabeli

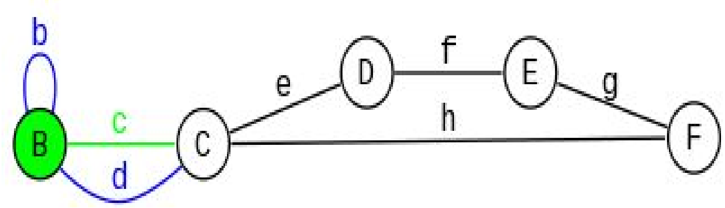
Nr etapu	wybór	możliwe alternatywy	skonstruowana droga
1	A	B	$\emptyset$
2	a		a

Algorytm Fleury'ego - krok 3



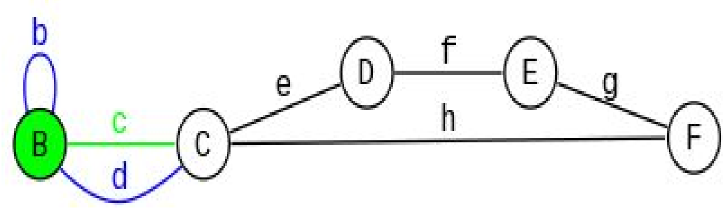
Usuwamy wybraną krawędź a (i wierzchołek A) z naszego grafu, punkt B (czyli drugi koniec krawędzi a) zgodnie z punktem V algorytmu ustalamy jako nowy punkt startowy i ponownie dokonujemy wyboru. Tym razem na podstawie punktu IV, bo z B wychodzi więcej niż jedna krawędź.

Algorytm Fleury'ego - krok 3



Ani jedna z krawędzi incydentnych z B nie jest mostem, więc możemy wybrać dowolną - powiedzmy, że to będzie c. Zapisujemy wybór i alternatywy w tabeli

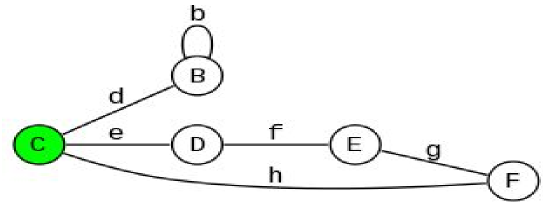
Algorytm Fleury'ego - krok 3



Ani jedna z krawędzi incydentnych z B nie jest mostem, więc możemy wybrać dowolną - powiedzmy, że to będzie c. Zapisujemy wybór i alternatywy w tabeli

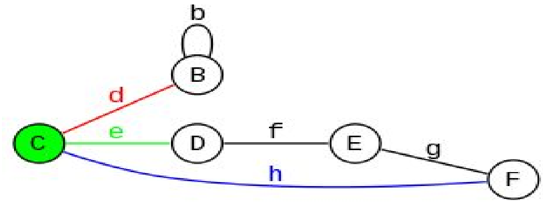
Nr etapu	wybór	możliwe alternatywy	skonstruowana droga
2	a		a
3	c	b, d	ac

Algorytm Fleury'ego - krok 4



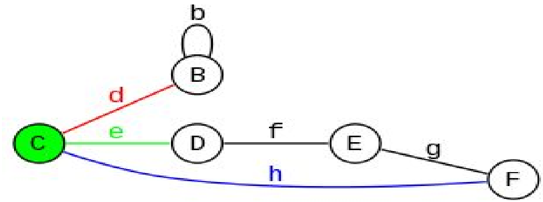
Z grafu usunęliśmy krawędź c, ale nie wierzchołek B (bo ciągle ma on krawędzie incydentne). Wydaje się, że mamy do wyboru trzy krawędzie jako następne odcinki drogi...

Algorytm Fleury'ego - krok 4



...ale krawędź d jest mostem, więc nie możemy jej wybrać! Spośród dwóch pozostałych wybieram krawędź e.

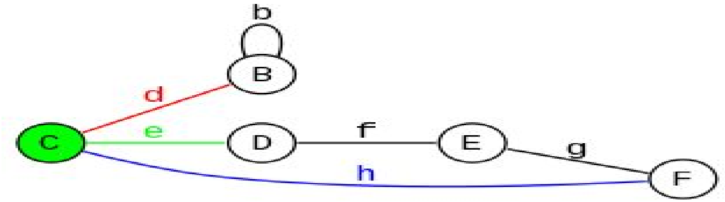
Algorytm Fleury'ego - krok 4



...ale krawędź d jest mostem, więc nie możemy jej wybrać! Spośród dwóch pozostałych wybieram krawędź e.

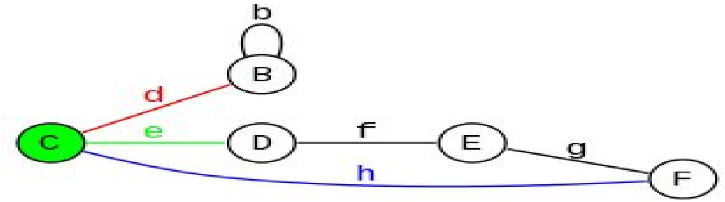
Nr etapu	wybór	możliwe alternatywy	skonstruowana droga
3	c	b, d	ac
4	e	h (nie może być d!)	ace

Algorytm Fleury'ego - dalsze kroki



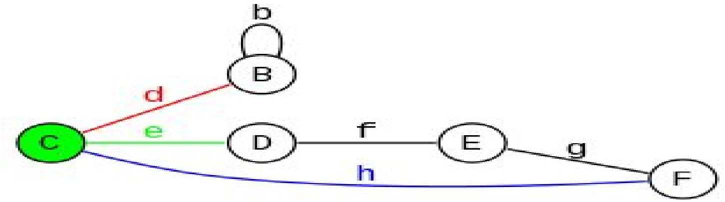
Kolejne kroki algorytmu są już na tyle trywialne, że można przeanalizować je jednocześnie. Nie mamy żadnej alternatywy dla wyboru kolejno krawędzi: f,g,h,d,b.

Algorytm Fleury'ego - dalsze kroki



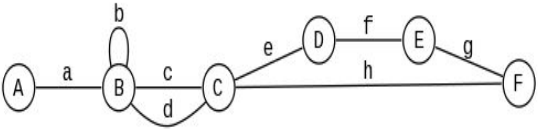
Kolejne kroki algorytmu są już na tyle trywialne, że można przeanalizować je jednocześnie. Nie mamy żadnej alternatywy dla wyboru kolejno krawędzi: f,g,h,d,b.Po wybraniu ostatniej krawędzi b, zgodnie z krokiem II zatrzymujemy algorytm, gdyż z wierzchołka B, w którym kończymy nie wychodzą już żadne krawędzie.

Algorytm Fleury'ego - dalsze kroki



Kolejne kroki algorytmu są już na tyle trywialne, że można przeanalizować je jednocześnie. Nie mamy żadnej alternatywy dla wyboru kolejno krawędzi: f,g,h,d,b.Po wybraniu ostatniej krawędzi b, zgodnie z krokiem II zatrzymujemy algorytm, gdyż z wierzchołka B, w którym kończymy nie wychodzą już żadne krawędzie. Wynikiem algorytmu powinna być tabela taka, jak na następnym slajdzie.

Algorytm Fleury'ego - tabela



Nr etapu	wybór	możliwe alternatywy	skonstruowana droga
1	A	B	$\emptyset$
2	a		a
3	c	b, d	ac
4	e	h	ace
5	f		acef
6	g		acefg
7	h		acefgh
8	d		acefghd
9	b		acefghdb

Uwagi dotyczące algorytmu Fleury'ego i jego zapisu

Uwagi dotyczące algorytmu Fleury'ego i jego zapisu

- Właściwym wynikiem algorytmu Fleury'ego jest jego prawa dolna komórka tabeli - czyli droga skonstruowana ze wszystkich krawędzi grafu - w tym przypadku droga Eulera.

Uwagi dotyczące algorytmu Fleury'ego i jego zapisu

- Właściwym wynikiem algorytmu Fleury'ego jest jego prawa dolna komórka tabeli - czyli droga skonstruowana ze wszystkich krawędzi grafu - w tym przypadku droga Eulera.
- Drogę tę, w ostatniej kolumnie tabeli, będziemy najczęściej zapisywać jako ciąg wierzchołków, a nie ciąg krawędzi. Gdy mamy do czynienia z grafem prostym, zazwyczaj krawędzi nie podpisujemy i domyślnie są one oznaczane przez parę wierzchołków z nią incydentnych. W wypadku grafu przykładowego jednak odeszliśmy od tej zasady, ze względu na krawędź wielokrotną między wierzchołkami B i C - oznaczenie BC byłoby niejednoznaczne.

Uwagi dotyczące algorytmu Fleury'ego i jego zapisu

Uwagi dotyczące algorytmu Fleury'ego i jego zapisu

- Algorytm nieprzypadkowo kończył się w wierzchołku B. Jeśli konstruujemy drogę Eulera, a nie cykl, to wierzchołki o nieparzystych stopniach są początkiem i końcem tej drogi. Gdybyśmy w pierwszym kroku wybrali B jako punkt startowy, algorytm zakończyłby się w A.

Uwagi dotyczące algorytmu Fleury'ego i jego zapisu

- Algorytm nieprzypadkowo kończył się w wierzchołku B. Jeśli konstruujemy drogę Eulera, a nie cykl, to wierzchołki o nieparzystych stopniach są początkiem i końcem tej drogi. Gdybyśmy w pierwszym kroku wybrali B jako punkt startowy, algorytm zakończyłby się w A.
- Notowanie alternatyw może się z początku wydawać uciążliwe, ale jest konieczne na potrzeby sprawdzania, czy Państwo rozumieją algorytm. Bez tej kolumny, sprawdzający egzamin nie mógłby odróżnić studenta, który wybiera kolejne połączenia na chybił-trafił i przypadkiem mu się udało (ta metoda zazwyczaj zadziała na małych grafach, które z konieczności są na sprawdzianach) od tego, który wie, co robi. W przykładzie, wypełnienie tej kolumny w czwartym kroku powinno być rozróżnieniem między takimi studentami.

Uwagi dotyczące algorytmu Fleury'ego i jego zapisu

Uwagi dotyczące algorytmu Fleury'ego i jego zapisu

- Jak twierdzenie Eulera wygląda dla grafów skierowanych? Podobnie.

Uwagi dotyczące algorytmu Fleury'ego i jego zapisu

- Jak twierdzenie Eulera wygląda dla grafów skierowanych? Podobnie.

Twierdzenie Eulera dla grafów skierowanych

Niech graf skierowany G będzie spójny (gdy go potraktujemy jako graf nieskierowany). Skierowana droga zamknięta w grafie G, przechodząca przez jego wszystkie krawędzie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba krawędzi wchodzących i wychodzących z każdego wierzchołka jest równa.

Algorytm do tego twierdzenia można opracować we własnym zakresie na podstawie algorytmu Fleury'ego.

Przykładowe problemy hamiltonowskie

Przykładowe problemy hamiltonowskie

- Problem sprzątania: znów programujemy robota sprzątającego jakiś budynek, ale tym razem sale (znajdujące się na przecięciach korytarzy), a nie korytarze. Jak to zrobić, by podczas jednego objazdu nie trafiał 2 razy do tej samej sali?

Przykładowe problemy hamiltonowskie

- Problem sprzątania: znów programujemy robota sprzątającego jakiś budynek, ale tym razem sale (znajdujące się na przecięciach korytarzy), a nie korytarze. Jak to zrobić, by podczas jednego objazdu nie trafiał 2 razy do tej samej sali?
- Klasyczny problem skoczka szachowego: odwiedzenie wszystkich pól szachownicy.

Przykładowe problemy hamiltonowskie

- Problem sprzątania: znów programujemy robota sprzątającego jakiś budynek, ale tym razem sale (znajdujące się na przecięciach korytarzy), a nie korytarze. Jak to zrobić, by podczas jednego objazdu nie trafiał 2 razy do tej samej sali?
- Klasyczny problem skoczka szachowego: odwiedzenie wszystkich pól szachownicy.
- Problem komiwojażera: utworzenie trasy przez zadaną liczbę miast tak, by przez żadne miasto nie przejeżdżać 2 razy.

Definicje

Wszystkie te problemy (i wiele podobnych) z punktu widzenia teorii grafów sprowadzają się do jednego: znalezienia cyklu Hamiltona.

Cykl Hamiltona

Cykl Hamiltona to cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu.

Definicje

Wszystkie te problemy (i wiele podobnych) z punktu widzenia teorii grafów sprowadzają się do jednego: znalezienia cyklu Hamiltona.

Cykl Hamiltona

Cykl Hamiltona to cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu.

Zwróćmy uwagę, że w szczególności cykl Hamiltona przechodzi przez każdy wierzchołek grafu (poza swoim początkiem i końcem) dokładnie raz. W przeciwieństwie do cyklu Eulera faktycznie jest cyklem w ścisłym sensie.

Definicje

Wszystkie te problemy (i wiele podobnych) z punktu widzenia teorii grafów sprowadzają się do jednego: znalezienia cyklu Hamiltona.

Cykl Hamiltona

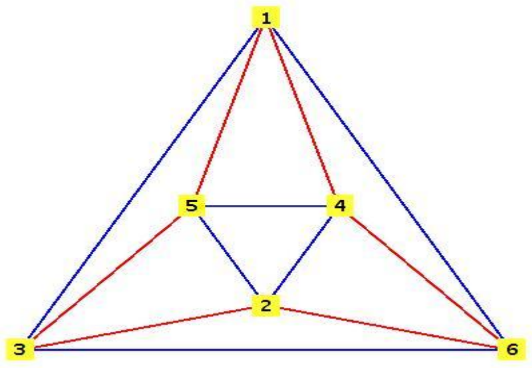
Cykl Hamiltona to cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu.

Zwróćmy uwagę, że w szczególności cykl Hamiltona przechodzi przez każdy wierzchołek grafu (poza swoim początkiem i końcem) dokładnie raz. W przeciwieństwie do cyklu Eulera faktycznie jest cyklem w ścisłym sensie.

Graf hamiltonowski

Graf hamiltonowski to graf posiadający cykl Hamiltona.

Przykład



Na czerwono przykładowy cykl Hamiltona w grafie ośmiościanu.

Ciekawy problem

Choć cykle Hamiltona wydają się podobne do cykli Eulera, nie jest znany dla nich odpowiednik twierdzenia Eulera.
Nie jest znana żadna metoda, pozwalająca szybko (tzn. w czasie wielomianowym) stwierdzić dla każdego grafu czy jest on hamiltonowski (chociaż sprawdzenie, czy dany cykl jest hamiltonowski jest dość proste - analogicznie do problemu rozkładu na czynniki pierwsze). Mamy do dyspozycji tylko warunki wystarczające na określenie tego.

Twierdzenie Orego

Jeśli w grafie prostym $\mathbf{G} = (V, E)$ o co najmniej 3 wierzchołkach każde dwa niesąsiednie wierzchołki v i w spełniają $\deg v + \deg w \geqslant |V|$, to graf $\mathbf{G}$ jest hamiltonowski. W szczególności, jest to prawdą jeśli $|E| \geqslant \frac{1}{2}(|V| - 1)(|V| - 2) + 2$.

Wskazówki nt. grafów hamiltonowskich

Wskazówki nt. grafów hamiltonowskich

- Grafy niespójne, zawierające wierzchołki rozspajające lub mosty nie są hamiltonowskie.

Wskazówki nt. grafów hamiltonowskich

- Grafy niespójne, zawierające wierzchołki rozspajające lub mosty nie są hamiltonowskie.
- Kliki K_n są hamiltonowskie dla $n \geqslant 3$.

Wskazówki nt. grafów hamiltonowskich

- Grafy niespójne, zawierające wierzchołki rozspajające lub mosty nie są hamiltonowskie.
- Kliki K_n są hamiltonowskie dla $n \geqslant 3$.
- Grafy-cykle są hamiltonowskie, a grafy-drogi nie.

Wskazówki nt. grafów hamiltonowskich

- Grafy niespójne, zawierające wierzchołki rozspajające lub mosty nie są hamiltonowskie.
- Kliki K_n są hamiltonowskie dla $n \geqslant 3$.
- Grafy-cykle są hamiltonowskie, a grafy-drogi nie.
- Grafy platońskie są hamiltonowskie.

Wskazówki nt. grafów hamiltonowskich

- Grafy niespójne, zawierające wierzchołki rozspajające lub mosty nie są hamiltonowskie.
- Kliki K_n są hamiltonowskie dla $n \geqslant 3$.
- Grafy-cykle są hamiltonowskie, a grafy-drogi nie.
- Grafy platońskie są hamiltonowskie.
- Dodanie nowej krawędzi do grafu hamiltonowskiego nie psuje hamiltonowskości. Dodanie wierzchołka może zepsuć.

Wskazówki nt. grafów hamiltonowskich

- Grafy niespójne, zawierające wierzchołki rozspajające lub mosty nie są hamiltonowskie.
- Kliki K_n są hamiltonowskie dla $n \geqslant 3$.
- Grafy-cykle są hamiltonowskie, a grafy-drogi nie.
- Grafy platońskie są hamiltonowskie.
- Dodanie nowej krawędzi do grafu hamiltonowskiego nie psuje hamiltonowskości. Dodanie wierzchołka może zepsuć.
- Graf Petersena nie zawiera mostów, ale nie jest hamiltonowski. Natomiast po usunięciu dowolnego wierzchołka i krawędzi do niego incydentnych, ten graf stanie się hamiltonowski.