IVa. Relacje - abstrakcyjne własności

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Badanie ogólnych własności relacji - motywacja

To jest fragment materiału nieomawiany na wykładzie. Jednak będziemy go przerabiać na ćwiczeniach i może się przydać na dalszych kursach, więc proszę sobie przejrzeć.
Często lepsze spojrzenie na daną sytuację można sobie zapewnić, jeśli uświadomimy sobie, że badane przez nas zjawiska są szczególnymi przypadkami zjawisk ogólniejszych. Tak jest i w tym wypadku: relacje preferencji i obojętności są szczególnymi przypadkami typów relacji, które nazywamy relacjami słabej preferencji, bądź relacjami równoważności.

Badanie ogólnych własności relacji - motywacja

To jest fragment materiału nieomawiany na wykładzie. Jednak będziemy go przerabiać na ćwiczeniach i może się przydać na dalszych kursach, więc proszę sobie przejrzeć.
Często lepsze spojrzenie na daną sytuację można sobie zapewnić, jeśli uświadomimy sobie, że badane przez nas zjawiska są szczególnymi przypadkami zjawisk ogólniejszych. Tak jest i w tym wypadku: relacje preferencji i obojętności są szczególnymi przypadkami typów relacji, które nazywamy relacjami słabej preferencji, bądź relacjami równoważności.
Wszystkie definicje w tym fragmencie będziemy omawiać na przykładzie relacji: $R \subset X \times X$.

Zwrotność

Relacja zwrotna

Relację nazywamy *zwrotną* jeśli dla każdego $x \in X$ zachodzi xRx.

Zwrotność

Relacja zwrotna

Relację nazywamy *zwrotną* jeśli dla każdego $x \in X$ zachodzi xRx.

Innymi słowy, relacja jest zwrotna, jeśli każdy element zbioru wchodzi w tą relację sam z sobą.

Zwrotność

Relacja zwrotna

Relację nazywamy *zwrotną* jeśli dla każdego $x \in X$ zachodzi xRx.

Innymi słowy, relacja jest zwrotna, jeśli każdy element zbioru wchodzi w tą relację sam z sobą. Relacja na liczbach rzeczywistych jest zwrotna, jeśli zawiera wykres prostej $y = x$.

Przykłady relacji zwrotnych

Przykłady relacji zwrotnych

- Relacja równości liczb $= \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest zwrotna, bo dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $x = x$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.).

Przykłady relacji zwrotnych

- Relacja równości liczb $= \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest zwrotna, bo dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $x = x$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.).
- Relacja równoważności $\Leftrightarrow \subset X \times X$, gdzie X jest zbiorem zdań, jest relacją zwrotną, ponieważ dla każdego $p \in X$ zachodzi $p \Leftrightarrow p$.

Przykłady relacji zwrotnych

- Relacja równości liczb $= \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest zwrotna, bo dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $x = x$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.).
- Relacja równoważności $\Leftrightarrow \subset X \times X$, gdzie X jest zbiorem zdań, jest relacją zwrotną, ponieważ dla każdego $p \in X$ zachodzi $p \Leftrightarrow p$.
- Relacja $\leqslant$ na zbiorze liczb rzeczywistych (bo zawsze $x \leqslant x$)

Przykłady relacji zwrotnych

- Relacja równości liczb $= \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest zwrotna, bo dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $x = x$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.).
- Relacja równoważności $\Leftrightarrow \subset X \times X$, gdzie X jest zbiorem zdań, jest relacją zwrotną, ponieważ dla każdego $p \in X$ zachodzi $p \Leftrightarrow p$.
- Relacja $\leqslant$ na zbiorze liczb rzeczywistych (bo zawsze $x \leqslant x$)
- Relacja na zbiorze studentów „bycia w tej samej grupie dziekańskiej" (bo każdy jest „ze sobą" w tej samej grupie).

Przykłady relacji niezwrotnych

Przykłady relacji niezwrotnych

- „Bycie rodzicem kogoś” zadane na zbiorze ludzi, bo nikt nie jest rodzicem samego siebie.

Przykłady relacji niezwrotnych

- „Bycie rodzicem kogoś” zadane na zbiorze ludzi, bo nikt nie jest rodzicem samego siebie.
- $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dana przez $xRy \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$ nie jest relacją zwrotną , gdyż nie zawsze zachodzi xRx np. nieprawdą jest, że $\frac{1}{3}R\frac{1}{3}$, gdyż $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$

Przykłady relacji niezwrotnych

- „Bycie rodzicem kogoś" zadane na zbiorze ludzi, bo nikt nie jest rodzicem samego siebie.
- $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dana przez $xRy \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$ nie jest relacją zwrotną , gdyż nie zawsze zachodzi xRx np. nieprawdą jest, że $\frac{1}{3}R\frac{1}{3}$, gdyż $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$
- Koniunkcja na zbiorze zdań, gdyż dla zdań fałszywych nieprawdą jest, że $p \wedge p$.

Symetryczność

Relacja symetryczna

Relację nazywamy *symetryczną* jeśli dla każdych $x, y \in X$ zachodzi $xRy \Leftrightarrow yRx$.

Symetryczność

Relacja symetryczna

Relację nazywamy *symetryczną* jeśli dla każdych $x, y \in X$ zachodzi $xRy \Leftrightarrow yRx$.

Innymi słowy, relacja jest symetryczna, jeśli elementy wchodzą ze sobą w relację „wzajemnie”.

Symetryczność

Relacja symetryczna

Relację nazywamy *symetryczną* jeśli dla każdych $x, y \in X$ zachodzi $xRy \Leftrightarrow yRx$.

Innymi słowy, relacja jest symetryczna, jeśli elementy wchodzą ze sobą w relację „wzajemnie". Relacja na liczbach rzeczywistych jest symetryczna, jeśli jej wykres jest symetryczny względem prostej $y = x$.

Przykłady relacji symetrycznych

Przykłady relacji symetrycznych

- Relacja równości liczb $= \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest symetryczna, bo dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $x = y \Leftrightarrow y = x$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.).

Przykłady relacji symetrycznych

- Relacja równości liczb $=\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ jest symetryczna, bo dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $x = y \Leftrightarrow y = x$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.).
- Relacja alternatywy $\vee \subset X \times X$, gdzie X jest zbiorem zdań, jest relacją symetryczną, ponieważ dla każdego $p, q \in X$ zachodzi $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (to samo dla koniunkcji i równoważności).

Przykłady relacji symetrycznych

- Relacja równości liczb $= \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest symetryczna, bo dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $x = y \Leftrightarrow y = x$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.).
- Relacja alternatywy $\vee \subset X \times X$, gdzie X jest zbiorem zdań, jest relacją symetryczną, ponieważ dla każdego $p, q \in X$ zachodzi $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (to samo dla koniunkcji i równoważności).
- Na zbiorze ludzi „bycie rodzeństwem” jest symetryczne, bo A jest bratem lub siostrą B wtedy i tylko wtedy, gdy B jest bratem lub siostrą A.

Przykłady relacji symetrycznych

- Relacja równości liczb $= \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest symetryczna, bo dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $x = y \Leftrightarrow y = x$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.).
- Relacja alternatywy $\vee \subset X \times X$, gdzie X jest zbiorem zdań, jest relacją symetryczną, ponieważ dla każdego $p, q \in X$ zachodzi $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (to samo dla koniunkcji i równoważności).
- Na zbiorze ludzi „bycie rodzeństwem" jest symetryczne, bo A jest bratem lub siostrą B wtedy i tylko wtedy, gdy B jest bratem lub siostrą A.
- Na zbiorze firm „bycie kontrahentem handlowym" jest symetryczne, bo A jest kontrahentem handlowym B wtedy i tylko wtedy, gdy B jest kontrahentem handlowym A.

Przykłady relacji niesymetrycznych

Przykłady relacji niesymetrycznych

- Relacja słabej nierówności liczb $\leqslant \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nie jest symetryczna, bo np. $2 \leqslant 3$, ale nieprawdą jest, że $3 \leqslant 2$. Tym bardziej symetryczna nie jest relacja $<$ na $\mathbb{R}$.

Przykłady relacji niesymetrycznych

- Relacja słabej nierówności liczb $\leqslant \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nie jest symetryczna, bo np. $2 \leqslant 3$, ale nieprawdą jest, że $3 \leqslant 2$. Tym bardziej symetryczna nie jest relacja $<$ na $\mathbb{R}$.
- Nie jest symetryczne zawieranie $\subset$ na zbiorach.

Przykłady relacji niesymetrycznych

- Relacja słabej nierówności liczb $\leqslant \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nie jest symetryczna, bo np. $2 \leqslant 3$, ale nieprawdą jest, że $3 \leqslant 2$. Tym bardziej symetryczna nie jest relacja $<$ na $\mathbb{R}$.
- Nie jest symetryczne zawieranie $\subset$ na zbiorach.
- Nie jest symetryczna relacja na zbiorze ludzi $xRy \Leftrightarrow x$ jest potomkiem y, bo nie zdarza się, by x był potomkiem y, a y jednocześnie potomkiem x.

Przykłady relacji niesymetrycznych

- Relacja słabej nierówności liczb $\leqslant \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nie jest symetryczna, bo np. $2 \leqslant 3$, ale nieprawdą jest, że $3 \leqslant 2$. Tym bardziej symetryczna nie jest relacja $<$ na $\mathbb{R}$.
- Nie jest symetryczne zawieranie $\subset$ na zbiorach.
- Nie jest symetryczna relacja na zbiorze ludzi $xRy \Leftrightarrow x$ jest potomkiem y, bo nie zdarza się, by x był potomkiem y, a y jednocześnie potomkiem x.
- Nie jest symetryczna relacja na zbiorze ludzi $xRy \Leftrightarrow x$ lubi y (bo może x lubić y, a y nie lubić x).

Przechodniość

Relacja przechodnia

Relację nazywamy *przechodnią* jeśli dla każdych $x, y, z \in X$ zachodzi $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.

Przechodniość

Relacja przechodnia

Relację nazywamy *przechodnią* jeśli dla każdych $x, y, z \in X$ zachodzi $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.

Innymi słowy, relacja jest przechodnia, jeśli łańcuch kolejnych elementów połączonych tą relacją łączy tą relacją pierwszy i ostatni element łańcucha.

Przechodniość

Relacja przechodnia

Relację nazywamy *przechodnią* jeśli dla każdych $x, y, z \in X$ zachodzi $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.

Innymi słowy, relacja jest przechodnia, jeśli łańcuch kolejnych elementów połączonych tą relacją łączy tą relacją pierwszy i ostatni element łańcucha. Nie znam łatwej interpretacji geometrycznej własności przechodniości.

Przykłady relacji przechodnich

Przykłady relacji przechodnich

- Relacje równości i nierówności na liczbach są przechodnie: jeśli $x = y$ i $y = z$ to oczywiście $x = z$. Tak samo, jeśli $x < y$ i $y < z$ to $x < z$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.) oraz np. relacji zawierania zbiorów.

Przykłady relacji przechodnich

- Relacje równości i nierówności na liczbach są przechodnie: jeśli $x = y$ i $y = z$ to oczywiście $x = z$. Tak samo, jeśli $x < y$ i $y < z$ to $x < z$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.) oraz np. relacji zawierania zbiorów.
- Szczególnie ważny jest fakt, że relacja wynikania jest przechodnia: jeśli $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow r$ to $p \Rightarrow r$. Na tej własności (zasada przechodniości implikacji) opierają się wszelkie rozumowania dedukcyjne, w szczególności dowody matematyczne.

Przykłady relacji przechodnich

- Relacje równości i nierówności na liczbach są przechodnie: jeśli $x = y$ i $y = z$ to oczywiście $x = z$. Tak samo, jeśli $x < y$ i $y < z$ to $x < z$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.) oraz np. relacji zawierania zbiorów.
- Szczególnie ważny jest fakt, że relacja wynikania jest przechodnia: jeśli $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow r$ to $p \Rightarrow r$. Na tej własności (zasada przechodniości implikacji) opierają się wszelkie rozumowania dedukcyjne, w szczególności dowody matematyczne.
- Relacja na zbiorze ludzi $xRy \Leftrightarrow x$ jest potomkiem y jest przechodnia.

Przykłady relacji przechodnich

- Relacje równości i nierówności na liczbach są przechodnie: jeśli $x = y$ i $y = z$ to oczywiście $x = z$. Tak samo, jeśli $x < y$ i $y < z$ to $x < z$. Zresztą to samo będzie dla każdej równości (np. zbiorów, wektorów, macierzy itp.) oraz np. relacji zawierania zbiorów.
- Szczególnie ważny jest fakt, że relacja wynikania jest przechodnia: jeśli $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow r$ to $p \Rightarrow r$. Na tej własności (zasada przechodniości implikacji) opierają się wszelkie rozumowania dedukcyjne, w szczególności dowody matematyczne.
- Relacja na zbiorze ludzi $xRy \Leftrightarrow x$ jest potomkiem y jest przechodnia.
- Relacja na zbiorze pracowników jakiejś firmy $xRy \Leftrightarrow x$ jest podwładnym y jest przechodnia.

Przykłady relacji nieprzechodnich

Przykłady relacji nieprzechodnich

- Nie jest przechodnią na przykład relacja $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dana przez $xRy \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$, gdyż $\frac{1}{3} R \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} R \frac{4}{3}$, ale nie zachodzi $\frac{1}{3} R \frac{4}{3}$ (bo $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$).

Przykłady relacji nieprzechodnich

- Nie jest przechodnią na przykład relacja $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dana przez $xRy \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$, gdyż $\frac{1}{3}R\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}R\frac{4}{3}$, ale nie zachodzi $\frac{1}{3}R\frac{4}{3}$ (bo $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$).
- Relacja bycia znajomym również nie jest przechodnia: może zajść sytuacja, że A jest znajomym B, B jest znajomym C, a A nie jest znajomym C.

Spójność

Relacja spójna

Relację nazywamy *spójną* jeśli dla każdych $x, y \in X$ zachodzi $xRy \vee yRx$.

Spójność

Relacja spójna

Relację nazywamy *spójną* jeśli dla każdych $x, y \in X$ zachodzi $xRy \vee yRx$.

Innymi słowy, relacja jest spójna, jeśli nie ma elementów, które nie są ze sobą w relacji w żadną stronę. Można kojarzyć relację spójną z „uporządkowaniem" jakiegoś zbioru.

Spójność

Relacja spójna

Relację nazywamy *spójną* jeśli dla każdych $x, y \in X$ zachodzi $xRy \vee yRx$.

Innymi słowy, relacja jest spójna, jeśli nie ma elementów, które nie są ze sobą w relacji w żadną stronę. Można kojarzyć relację spójną z „uporządkowaniem" jakiegoś zbioru. Nie znam łatwej interpretacji geometrycznej własności spójności, poza naturalnym faktem, że suma relacji i jej odbicia względem prostej $x = y$ musi dawać całą przestrzeń $X \times X$.

Przykłady relacji spójnych

Przykłady relacji spójnych

- Jedyna relacja spójna i symetryczna jednocześnie to $X \times X$ (relacja pełna)

Przykłady relacji spójnych

- Jedyna relacja spójna i symetryczna jednocześnie to $X \times X$ (relacja pełna)
- Spójna jest relacja słabej nierówności $\leqslant \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, bo dla każdej pary liczb rzeczywistych, pierwsza jest niemniejsza od drugiej lub druga jest niemniejsza od pierwszej.

Przykłady relacji spójnych

- Jedyna relacja spójna i symetryczna jednocześnie to $X \times X$ (relacja pełna)
- Spójna jest relacja słabej nierówności $\leqslant \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, bo dla każdej pary liczb rzeczywistych, pierwsza jest niemniejsza od drugiej lub druga jest niemniejsza od pierwszej.
- Relacją spójną jest też na przykład relacja „stania nie dalej niż druga osoba" zadana na zbiorze osób stojących w kolejce.

Przykłady relacji spójnych

- Jedyna relacja spójna i symetryczna jednocześnie to $X \times X$ (relacja pełna)
- Spójna jest relacja słabej nierówności $\leqslant \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, bo dla każdej pary liczb rzeczywistych, pierwsza jest niemniejsza od drugiej lub druga jest niemniejsza od pierwszej.
- Relacją spójną jest też na przykład relacja „stania nie dalej niż druga osoba" zadana na zbiorze osób stojących w kolejce.
- Relacja na zbiorze pracowników jakiejś firmy $xRy \Leftrightarrow x$ jest podwładnym y jest przechodnia.

Przykłady relacji niespójnych

Przykłady relacji niespójnych

- Zauważmy, że relacja spójna jest zawsze zwrotna, więc wszystkie relacje, które nie były zwrotne, nie są też spójne.

Przykłady relacji niespójnych

- Zauważmy, że relacja spójna jest zawsze zwrotna, więc wszystkie relacje, które nie były zwrotne, nie są też spójne.
- Relacja podzielności na liczbach naturalnych nie jest spójna, mimo, że jest zwrotna: np. 5 nie dzieli się przez 3, ani 3 nie dzieli się przez 5.

Relacja słabej preferencji

Relacja słabej preferencji

Relację nazywamy *relacją słabej preferencji* jeśli jest zwrotna, przechodnia i spójna.

Relacja słabej preferencji

Relacja słabej preferencji

Relację nazywamy *relacją słabej preferencji* jeśli jest zwrotna, przechodnia i spójna.

Innymi słowy, relacja jest relacją słabej preferencji, jeśli przy jej pomocy można porównać dwa elementy (spójność), każdy element jest nie lepszy od samego siebie (zwrotność) i to porównanie jest przechodnie.

Przykłady relacji słabej preferencji

Przykłady relacji słabej preferencji

- Relacja preferencji producenta.

Przykłady relacji słabej preferencji

- Relacja preferencji producenta.
- Relacja preferencji konsumenta.

Relacja równoważności

Relacja równoważności

Relację nazywamy *relacją równoważności* lub *równoważnością* jeśli jest zwrotna, przechodnia i symetryczna.

Relacja równoważności

Relacja równoważności

Relację nazywamy *relacją równoważności* lub *równoważnością* jeśli jest zwrotna, przechodnia i symetryczna.

Interpretacja pojawi się za chwilę.

Przykłady równoważności

Przykłady równoważności

- Relacjami równoważności są wszelkie relacje równości, czy też równoważności zdań.

Przykłady równoważności

- Relacjami równoważności są wszelkie relacje równości, czy też równoważności zdań.
- Najistotniejszą w ekonomii relacją równoważności jest wspomniana wcześniej relacja obojętności (proszę sprawdzić jej zwrotność, przechodniość i symetryczność we własnym zakresie).

Klasa abstrakcji

Klasa abstrakcji

Niech R będzie równoważnością. Wtedy $[x] := \{y : xRy\}$ nazywamy *klasą równoważności* (lub *klasą abstrakcji*) elementu x.

Klasa abstrakcji

Klasa abstrakcji

Niech R będzie równoważnością. Wtedy $[x] := \{y : xRy\}$ nazywamy *klasą równoważności* (lub *klasą abstrakcji*) elementu x.

Twierdzenie o klasach abstrakcji

Jeśli $y \in [x]$, to $[x] = [y]$. Innymi słowy, klasy abstrakcji relacji równoważności są albo jednakowe, albo rozłączne.

Klasa abstrakcji

Klasa abstrakcji

Niech R będzie równoważnością. Wtedy $[x] := \{y : xRy\}$ nazywamy *klasą równoważności* (lub *klasą abstrakcji*) elementu x.

Twierdzenie o klasach abstrakcji

Jeśli $y \in [x]$, to $[x] = [y]$. Innymi słowy, klasy abstrakcji relacji równoważności są albo jednakowe, albo rozłączne.

Interpretacja relacji równoważności

Wniosek: relacja równoważności jako podział

Relacja jest relacją równoważności, jeśli dzieli zbiór X na klasy abstrakcji tj. gdy jej klasy abstrakcji, jeśli nie są jednakowe, to są rozłączne, a ich suma mnogościowa jest całym zbiorem X.

Interpretacja relacji równoważności

Wniosek: relacja równoważności jako podział

Relacja jest relacją równoważności, jeśli dzieli zbiór X na klasy abstrakcji tj. gdy jej klasy abstrakcji, jeśli nie są jednakowe, to są rozłączne, a ich suma mnogościowa jest całym zbiorem X.

Z tych ostatnich twierdzeń wynika, że na relację równoważności można patrzeć w inny sposób: jest to podział naszej przestrzeni na rozłączne między sobą części, zwane właśnie klasami abstrakcji tej relacji.

Przykłady równoważności

Przykłady równoważności

- Zbiór koszyków podzielony na krzywe obojętności konsumenta (relacja obojętności).

Przykłady równoważności

- Zbiór koszyków podzielony na krzywe obojętności konsumenta (relacja obojętności).
- Zbiór studentów podzielony na grupy dziekańskie (relacja $xRy \Leftrightarrow x$ jest w tej samej grupie dziekańskiej co y).

Przykłady równoważności

- Zbiór koszyków podzielony na krzywe obojętności konsumenta (relacja obojętności).
- Zbiór studentów podzielony na grupy dziekańskie (relacja $xRy \Leftrightarrow$ x jest w tej samej grupie dziekańskiej co y).
- Podział zbioru wszystkich zdań na prawdziwe i fałszywe (relacja równoważności zdań).

Przykłady równoważności

- Zbiór koszyków podzielony na krzywe obojętności konsumenta (relacja obojętności).
- Zbiór studentów podzielony na grupy dziekańskie (relacja $xRy \Leftrightarrow$ x jest w tej samej grupie dziekańskiej co y).
- Podział zbioru wszystkich zdań na prawdziwe i fałszywe (relacja równoważności zdań).
- Podział firm ze względu na sektor rynku w którym działają - przy założeniu, że każda firma działa w jednym sektorze (relacja $xRy \Leftrightarrow x$ działa w tym samym sektorze co y).

Przykłady równoważności

- Zbiór koszyków podzielony na krzywe obojętności konsumenta (relacja obojętności).
- Zbiór studentów podzielony na grupy dziekańskie (relacja $xRy \Leftrightarrow$ x jest w tej samej grupie dziekańskiej co y).
- Podział zbioru wszystkich zdań na prawdziwe i fałszywe (relacja równoważności zdań).
- Podział firm ze względu na sektor rynku w którym działają - przy założeniu, że każda firma działa w jednym sektorze (relacja $xRy \Leftrightarrow x$ działa w tym samym sektorze co y).
- Podział ludzi ze względu na kolor włosów (relacja $xRy \Leftrightarrow x$ ma ten sam kolor włosów, co y).