IV. Relacje

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Relacje - motywacja

Nie wszystkie interesujące nas zależności w świecie rzeczywistym, czy też w modelach ekonomicznych można opisać jako funkcje. Czasami, ograniczenie do przyporządkowania każdemu argumentowi funkcji dokładnie jednego obiektu jest zbyt silne.

Relacje - motywacja

Nie wszystkie interesujące nas zależności w świecie rzeczywistym, czy też w modelach ekonomicznych można opisać jako funkcje. Czasami, ograniczenie do przyporządkowania każdemu argumentowi funkcji dokładnie jednego obiektu jest zbyt silne.

- Znajomości lub więzy rodzinne między ludźmi: każdy może mieć wielu znajomych lub wiele osób w rodzinie

Relacje - motywacja

Nie wszystkie interesujące nas zależności w świecie rzeczywistym, czy też w modelach ekonomicznych można opisać jako funkcje. Czasami, ograniczenie do przyporządkowania każdemu argumentowi funkcji dokładnie jednego obiektu jest zbyt silne.

- Znajomości lub więzy rodzinne między ludźmi: każdy może mieć wielu znajomych lub wiele osób w rodzinie
- Przyporządkowanie firmie jej dostawców, sklepowi jego klientów z tego samego powodu nie jest funkcją

Relacje - motywacja

Nie wszystkie interesujące nas zależności w świecie rzeczywistym, czy też w modelach ekonomicznych można opisać jako funkcje. Czasami, ograniczenie do przyporządkowania każdemu argumentowi funkcji dokładnie jednego obiektu jest zbyt silne.

- Znajomości lub więzy rodzinne między ludźmi: każdy może mieć wielu znajomych lub wiele osób w rodzinie
- Przyporządkowanie firmie jej dostawców, sklepowi jego klientów z tego samego powodu nie jest funkcją
- Porównywanie jakości danych towarów: jeśli towarowi z danej kategorii chcemy przypisać towary, które są od niego lepsze (relacja $<$), to również nie będzie to funkcja.

Relacje - motywacja

Relacja jest pewnym uogólnieniem funkcji. W części II wstępu podawałem przykłady obiektów, które nie są funkcjami, mimo, że są dość podobne:

Relacje - motywacja

Relacja jest pewnym uogólnieniem funkcji. W części II wstępu podawałem przykłady obiektów, które nie są funkcjami, mimo, że są dość podobne:

- $f(x) = \frac{1}{x}$, gdy $X = Y = \mathbb{R}$ (bo $0 \in D_f$)

Relacje - motywacja

Relacja jest pewnym uogólnieniem funkcji. W części II wstępu podawałem przykłady obiektów, które nie są funkcjami, mimo, że są dość podobne:

- $f(x) = \frac{1}{x}$, gdy $X = Y = \mathbb{R}$ (bo $0 \in D_f$)
- $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, $X = Y = [-1, 1]$ (bo dla $x = 0$ przyjmowałaby 2 różne wartości)

Relacje - motywacja

Relacja jest pewnym uogólnieniem funkcji. W części II wstępu podawałem przykłady obiektów, które nie są funkcjami, mimo, że są dość podobne:

- $f(x) = \frac{1}{x}$, gdy $X = Y = \mathbb{R}$ (bo $0 \in D_f$)
- $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, $X = Y = [-1, 1]$ (bo dla $x = 0$ przyjmowałaby 2 różne wartości)
- „relacja rodzeństwa" na zbiorze ludzi, która każdemu człowiekowi przypisuje wszystkich jego braci i siostry (bo niektórym argumentom nie przypisywałaby żadnych wartości, a innym kilka).

Relacje - motywacja

Relacja jest pewnym uogólnieniem funkcji. W części II wstępu podawałem przykłady obiektów, które nie są funkcjami, mimo, że są dość podobne:

- $f(x) = \frac{1}{x}$, gdy $X = Y = \mathbb{R}$ (bo $0 \in D_f$)
- $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, $X = Y = [-1, 1]$ (bo dla $x = 0$ przyjmowałaby 2 różne wartości)
- „relacja rodzeństwa” na zbiorze ludzi, która każdemu człowiekowi przypisuje wszystkich jego braci i siostry (bo niektórym argumentom nie przypisywałaby żadnych wartości, a innym kilka).

Te obiekty są także przykładami relacji.

Relacja - definicja

Relację możemy sobie wyobrażać jako „funkcję wielowartościową” tj. takie „odwzorowanie”, które argumentowi może przypisywać wiele wartości (albo i żadnej).

Relacja - definicja

Relację możemy sobie wyobrażać jako „funkcję wielowartościową” tj. takie „odwzorowanie”, które argumentowi może przypisywać wiele wartości (albo i żadnej). Relacja zwykle nie jest funkcją (acz każda funkcja jest relacją).

Relacja

Dla danych zbiorów X, Y *relacją* nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$. Jeśli para (x, y) należy do relacji $R \subset X \times Y$, to zapisujemy ten fakt: xRy i czytamy: „x jest w relacji R z y”.

Relacja - definicja

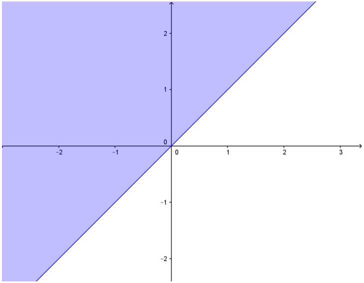
Relację możemy sobie wyobrażać jako „funkcję wielowartościową” tj. takie „odwzorowanie”, które argumentowi może przypisywać wiele wartości (albo i żadnej). Relacja zwykle nie jest funkcją (acz każda funkcja jest relacją).

Relacja

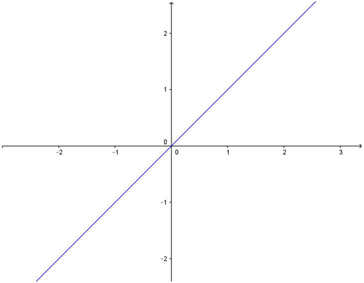
Dla danych zbiorów X, Y *relacją* nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$. Jeśli para (x, y) należy do relacji $R \subset X \times Y$, to zapisujemy ten fakt: xRy i czytamy: „x jest w relacji R z y”.

Dla relacji pomiędzy liczbami rzeczywistymi, możemy rysować wykresy.

Relacje matematyczne - przykłady i wykresy

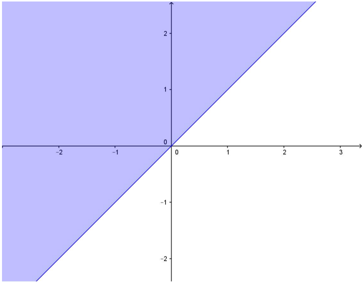


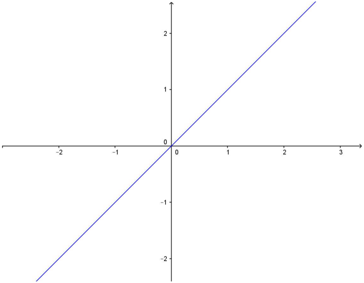
$xRy \Leftrightarrow x \leqslant y$ - relacja porządku na $\mathbb{R}$.



$xRy \Leftrightarrow x = y$ - relacja identyczności (też funkcja).

Relacje matematyczne - przykłady i wykresy





$xRy \Leftrightarrow x \leqslant y$ - relacja porządku na $\mathbb{R}$.

$xRy \Leftrightarrow x = y$ - relacja identyczności (też funkcja).

Znaczki $\leqslant, =$ są tak naprawdę nazwami relacji!

Relacje matematyczne - przykłady

Znamy też inne matematyczne relacje, nie będące podzbiorami $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Relacje matematyczne - przykłady

Znamy też inne matematyczne relacje, nie będące podzbiorami $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- Relacja na zbiorze zdań $xRy \Leftrightarrow x \wedge y$ (za $\wedge$ można wstawić dowolny inny funktor logiczny).

Relacje matematyczne - przykłady

Znamy też inne matematyczne relacje, nie będące podzbiorami $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- Relacja na zbiorze zdań $xRy \Leftrightarrow x \wedge y$ (za $\wedge$ można wstawić dowolny inny funktor logiczny).
- Relacja na zbiorze podzbiorów $\mathbb{R}$ (oznaczanym $\mathcal{P}(\mathbb{R})$) $xRy \Leftrightarrow x \subset y$

Relacje matematyczne - przykłady

Znamy też inne matematyczne relacje, nie będące podzbiorami $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- Relacja na zbiorze zdań $xRy \Leftrightarrow x \wedge y$ (za $\wedge$ można wstawić dowolny inny funktor logiczny).
- Relacja na zbiorze podzbiorów $\mathbb{R}$ (oznaczanym $\mathcal{P}(\mathbb{R})$) $xRy \Leftrightarrow x \subset y$
- Relacja może być zawarta w iloczynie kartezjańskim różnych zbiorów - np. $R \subset \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$ zdefiniowana $xRy \Leftrightarrow x \in y$.

Relacje - inne przykłady

Właśnie relacje, a nie funkcje, są dobrym modelem dla przykładów przedstawionych na początku:

Relacje - inne przykłady

Właśnie relacje, a nie funkcje, są dobrym modelem dla przykładów przedstawionych na początku:

- Relacja znajomości na zbiorze ludzi: $xRy \Leftrightarrow$ x jest znajomym y

Relacje - inne przykłady

Właśnie relacje, a nie funkcje, są dobrym modelem dla przykładów przedstawionych na początku:

- Relacja znajomości na zbiorze ludzi: $xRy \Leftrightarrow$ x jest znajomym y
- $xRy \Leftrightarrow x$ jest firmą, a y jej dostawcą (x jest sklepem, y jego klientem)

Relacje - inne przykłady

Właśnie relacje, a nie funkcje, są dobrym modelem dla przykładów przedstawionych na początku:

- Relacja znajomości na zbiorze ludzi: $xRy \Leftrightarrow$ x jest znajomym y
- $xRy \Leftrightarrow x$ jest firmą, a y jej dostawcą (x jest sklepem, y jego klientem)
- Porównywanie jakości danych towarów: $xRy \Leftrightarrow x$ jest gorszej jakości niż y.

Zagadnienie produkcyjne

Rozważmy producenta, który chce zmaksymalizować zysk (albo przychód, albo wielkość produkcji). W tym celu musi wybrać, jak duże nakłady poszczególnych czynników produkcji musi zainwestować w proces produkcyjny.

Zagadnienie produkcyjne

Rozważmy producenta, który chce zmaksymalizować zysk (albo przychód, albo wielkość produkcji). W tym celu musi wybrać, jak duże nakłady poszczególnych czynników produkcji musi zainwestować w proces produkcyjny. Dla uproszczenia, zajmiemy się sytuacją, w której mamy do czynienia tylko z dwoma homogenicznymi czynnikami produkcji: pracą (l) i kapitałem (k).

Zagadnienie produkcyjne

Rozważmy producenta, który chce zmaksymalizować zysk (albo przychód, albo wielkość produkcji). W tym celu musi wybrać, jak duże nakłady poszczególnych czynników produkcji musi zainwestować w proces produkcyjny. Dla uproszczenia, zajmiemy się sytuacją, w której mamy do czynienia tylko z dwoma homogenicznymi czynnikami produkcji: pracą (l) i kapitałem (k). Każda para (k,l) symbolizuje pewną *technologię* uzyskania konkretnej ilości produktu.

Zagadnienie produkcyjne - funkcja zysku i relacja preferencji

Wtedy możemy zdefiniować funkcję zysku $Z(k, l)$ (która może być np. wspomnianą na poprzedniej części wstępu funkcją Cobba-Douglasa), jako zysk producenta przy użyciu danej technologii. Oczywiście, $Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Zagadnienie produkcyjne - funkcja zysku i relacja preferencji

Wtedy możemy zdefiniować funkcję zysku $Z(k, l)$ (która może być np. wspomnianą na poprzedniej części wstępu funkcją Cobba-Douglasa), jako zysk producenta przy użyciu danej technologii. Oczywiście, $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Dzięki tej funkcji, możemy *porównać* każde dwa poziomy nakładów. Zapisujemy $(k_1, l_1) \precsim (k_2, l_2) \Leftrightarrow Z(k_1, l_1) \leqslant Z(k_2, l_2)$.

Zagadnienie produkcyjne - funkcja zysku i relacja preferencji

Wtedy możemy zdefiniować funkcję zysku $Z(k, l)$ (która może być np. wspomnianą na poprzedniej części wstępu funkcją Cobba-Douglasa), jako zysk producenta przy użyciu danej technologii. Oczywiście, $Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dzięki tej funkcji, możemy *porównać* każde dwa poziomy nakładów. Zapisujemy $(k_1, l_1) \precsim (k_2, l_2) \Leftrightarrow Z(k_1, l_1) \leqslant Z(k_2, l_2)$. Relację $\precsim$, będącą podzbiorem $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ nazywamy *relacją preferencji producenta*: w istocie, pokazuje ona, które z rozwiązań producent preferuje (a przynajmniej, nie uznaje za gorsze).

Preferencje producenta - przykład

Przykładowo, rozważmy funkcję zysku typu Cobba-Douglasa $Z(k,l) = k^2 l$.

Preferencje producenta - przykład

Przykładowo, rozważmy funkcję zysku typu Cobba-Douglasa $Z(k,l) = k^2 l$. Powiedzmy, że producent chce porównać 3 możliwe technologie: $(k,l) = (1,2)$ (technologia pracochłonna), $(k,l) = (4, \frac{1}{2})$ (technologia kapitałochłonna) i $(k,l) = (2,1)$ (technologia pośrednia).

Preferencje producenta - przykład

Przykładowo, rozważmy funkcję zysku typu Cobba-Douglasa $Z(k, l) = k^2 l$. Powiedzmy, że producent chce porównać 3 możliwe technologie: $(k, l) = (1, 2)$ (technologia pracochłonna), $(k, l) = (4, \frac{1}{2})$ (technologia kapitałochłonna) i $(k, l) = (2, 1)$ (technologia pośrednia). Wystarczy, że policzymy funkcję zysku dla tych trzech poziomów nakładów: $Z(1, 2) = 2$, $Z(4, \frac{1}{2}) = 8$ i $Z(2, 1) = 4$

Preferencje producenta - przykład

Przykładowo, rozważmy funkcję zysku typu Cobba-Douglasa $Z(k, l) = k^2 l$. Powiedzmy, że producent chce porównać 3 możliwe technologie: $(k, l) = (1, 2)$ (technologia pracochłonna), $(k, l) = (4, \frac{1}{2})$ (technologia kapitałochłonna) i $(k, l) = (2, 1)$ (technologia pośrednia). Wystarczy, że policzymy funkcję zysku dla tych trzech poziomów nakładów: $Z(1, 2) = 2$, $Z(4, \frac{1}{2}) = 8$ i $Z(2, 1) = 4$ i otrzymamy uporządkowanie $(1, 2) \precsim (2, 1) \precsim (4, \frac{1}{2})$ (czyli, technologia pracochłonna jest najmniej zyskowna, technologia pośrednia jest zyskowniejsza, a najbardziej opłacalna jest technologia kapitałochłonna).

Preferencje producenta - przykład

Przykładowo, rozważmy funkcję zysku typu Cobba-Douglasa $Z(k, l) = k^2 l$. Powiedzmy, że producent chce porównać 3 możliwe technologie: $(k, l) = (1, 2)$ (technologia pracochłonna), $(k, l) = (4, \frac{1}{2})$ (technologia kapitałochłonna) i $(k, l) = (2, 1)$ (technologia pośrednia). Wystarczy, że policzymy funkcję zysku dla tych trzech poziomów nakładów: $Z(1, 2) = 2$, $Z(4, \frac{1}{2}) = 8$ i $Z(2, 1) = 4$ i otrzymamy uporządkowanie $(1, 2) \precsim (2, 1) \precsim (4, \frac{1}{2})$ (czyli, technologia pracochłonna jest najmniej zyskowna, technologia pośrednia jest zyskowniejsza, a najbardziej opłacalna jest technologia kapitałochłonna).

Preferencje producenta - relacja obojętności

Generalnie, rysowanie wykresów funkcji dwóch zmiennych jest dość skomplikowane.

Preferencje producenta - relacja obojętności

Generalnie, rysowanie wykresów funkcji dwóch zmiennych jest dość skomplikowane. Zazwyczaj posługujemy się w tym celu tzw. *izokwantami*, czyli zbiorami (zazwyczaj krzywymi), na których funkcja dwóch zmiennych przyjmuje stałą wartość.

Preferencje producenta - relacja obojętności

Generalnie, rysowanie wykresów funkcji dwóch zmiennych jest dość skomplikowane. Zazwyczaj posługujemy się w tym celu tzw. *izokwantami*, czyli zbiorami (zazwyczaj krzywymi), na których funkcja dwóch zmiennych przyjmuje stałą wartość. W tym konkretnym przypadku izokwanty funkcji zysku (ew. przychodu, produkcji) nazywamy *krzywymi obojętności*. Innymi słowy, całą przestrzeń możliwych par nakładów możemy podzielić na części takie, że zysk uzyskany przez dwie pary nakładów należące do każdej z tych części jest taki sam.

Preferencje producenta - relacja obojętności

Generalnie, rysowanie wykresów funkcji dwóch zmiennych jest dość skomplikowane. Zazwyczaj posługujemy się w tym celu tzw. *izokwantami*, czyli zbiorami (zazwyczaj krzywymi), na których funkcja dwóch zmiennych przyjmuje stałą wartość. W tym konkretnym przypadku izokwanty funkcji zysku (ew. przychodu, produkcji) nazywamy *krzywymi obojętności*. Innymi słowy, całą przestrzeń możliwych par nakładów możemy podzielić na części takie, że zysk uzyskany przez dwie pary nakładów należące do każdej z tych części jest taki sam. W ten sposób definiujemy relację *obojętności* (lub indyferencji) $\sim$: dwie technologie wchodzą ze sobą w relację obojętności, jeśli zysk jest taki sam dla obu par nakładów. Formalnie zapisujemy: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow Z(x_1, y_1) = Z(x_2, y_2)$.

Preferencje producenta - krzywa obojętności

Przykładowo, dla $Z(k,l) = k^2 l$ i technologii $(2,1)$ możemy zauważyć, że $Z(2,1) = 4 = Z(1,4)$, więc $(1,4) \sim (2,1)$.

Preferencje producenta - krzywa obojętności

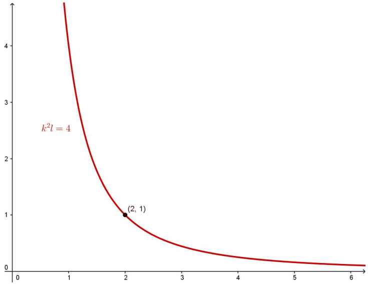
Przykładowo, dla $Z(k,l) = k^2 l$ i technologii $(2,1)$ możemy zauważyć, że $Z(2,1) = 4 = Z(1,4)$, więc $(1,4) \sim (2,1)$. Ogólniej, by wyznaczyć krzywą obojętności dla $(2,1)$ (czyli zbiór technologii z którymi $(2,1)$ wchodzi w relację obojętności), rozwiązujemy $Z(k,l) = k^2 l = 4$

Preferencje producenta - krzywa obojętności

Przykładowo, dla $Z(k, l) = k^2 l$ i technologii $(2, 1)$ możemy zauważyć, że $Z(2, 1) = 4 = Z(1, 4)$, więc $(1, 4) \sim (2, 1)$. Ogólniej, by wyznaczyć krzywą obojętności dla $(2, 1)$ (czyli zbiór technologii z którymi $(2, 1)$ wchodzi w relację obojętności), rozwiązujemy $Z(k, l) = k^2 l = 4$ i stąd np. $l = \frac{4}{k^2}$ - co zaznaczamy w I ćwiartce (bo tam ma sens).

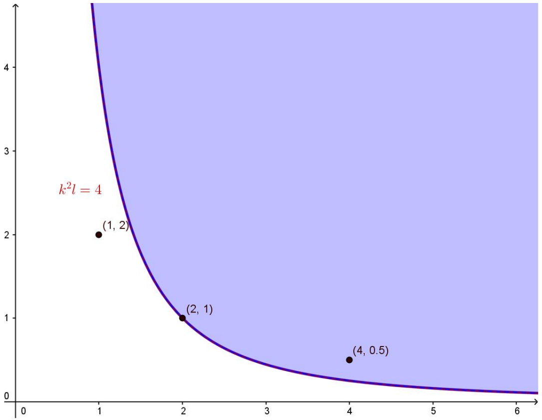
Preferencje producenta - krzywa obojętności

Przykładowo, dla $Z(k,l) = k^2 l$ i technologii $(2,1)$ możemy zauważyć, że $Z(2,1) = 4 = Z(1,4)$, więc $(1,4) \sim (2,1)$. Ogólniej, by wyznaczyć krzywą obojętności dla $(2,1)$ (czyli zbiór technologii z którymi $(2,1)$ wchodzi w relację obojętności), rozwiązujemy $Z(k,l) = k^2 l = 4$ i stąd np. $l = \frac{4}{k^2}$ - co zaznaczamy w I ćwiartce (bo tam ma sens).



.

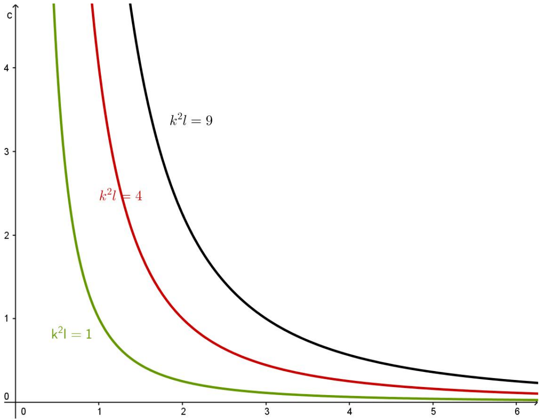
Preferencje producenta - krzywa obojętności



.

Ta krzywa rozdziala 2 części przestrzeni technologii: bardziej opłacalne od $(2, 1)$ (spełniające warunek $k^2l > 4$ - zaznaczone na chyba jasnofioletowo) i mniej opłacalne ($k^2l < 4$ - na biało).

Preferencje producenta - krzywe obojętności



.

Całą przestrzeń technologii możemy zapełnić krzywymi obojętności o różnych poziomach zysku.

Preferencje producenta - problem na przyszłość

Zazwyczaj producent nie może zupełnie dowolnie wybierać par (k, l) - jest ograniczony np. swoim budżetem. Dlatego, w praktyce konieczne będzie rozwiązanie tzw. zagadnienia optymalizacyjnego: wybranie takiej pary poziomów nakładów, dla której producent osiąga maksymalny zysk (przychód, wielkość produkcji) w danym zbiorze „możliwych do użycia" par. Takie zagadnienia będą typowe dla dalszej części wykładu z analizy.

Preferencje producenta - problem na przyszłość

Zazwyczaj producent nie może zupełnie dowolnie wybierać par (k, l) - jest ograniczony np. swoim budżetem. Dlatego, w praktyce konieczne będzie rozwiązanie tzw. zagadnienia optymalizacyjnego: wybranie takiej pary poziomów nakładów, dla której producent osiąga maksymalny zysk (przychód, wielkość produkcji) w danym zbiorze „możliwych do użycia” par. Takie zagadnienia będą typowe dla dalszej części wykładu z analizy.

Doskonała substytucja i doskonała komplementarność

Za pomocą krzywych obojętności można przedstawić funkcję zysku np. dla dóbr *doskonale substytucyjnych*, czyli takich, z których każde może zastąpić to drugie w stosunku 1 : 1 (np. długopisy z czerwoną i zieloną obudową).

Doskonała substytucja i doskonała komplementarność

Za pomocą krzywych obojętności można przedstawić funkcję zysku np. dla dóbr *doskonale substytucyjnych*, czyli takich, z których każde może zastąpić to drugie w stosunku 1 : 1 (np. długopisy z czerwoną i zieloną obudową). Dla producenta nie jest wtedy istotna ilość każdego z tych dóbr z osobna, lecz suma ich ilości, więc funkcję zysku możemy określić w postaci $Z(x, y) = x + y$ (gdzie x i y to ilości obu dóbr).

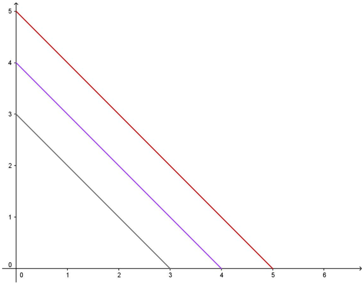
Doskonała substytucja i doskonała komplementarność

Za pomocą krzywych obojętności można przedstawić funkcję zysku np. dla dóbr *doskonale substytucyjnych*, czyli takich, z których każde może zastąpić to drugie w stosunku $1:1$ (np. długopisy z czerwoną i zieloną obudową). Dla producenta nie jest wtedy istotna ilość każdego z tych dóbr z osobna, lecz suma ich ilości, więc funkcję zysku możemy określić w postaci $Z(x, y) = x + y$ (gdzie x i y to ilości obu dóbr). Można się też zastanowić nad dobrami *doskonale komplementarnymi*, czyli takimi, że każdy egzemplarz pierwszego dobra jest bezużyteczny bez egzemplarza drugiego dobra (np. prawy but i lewy but).

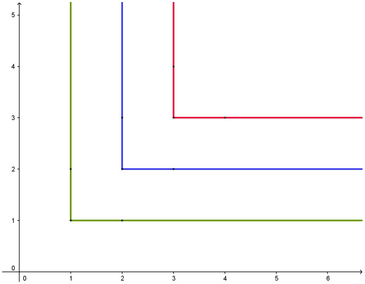
Doskonała substytucja i doskonała komplementarność

Za pomocą krzywych obojętności można przedstawić funkcję zysku np. dla dóbr *doskonale substytucyjnych*, czyli takich, z których każde może zastąpić to drugie w stosunku $1:1$ (np. długopisy z czerwoną i zieloną obudową). Dla producenta nie jest wtedy istotna ilość każdego z tych dóbr z osobna, lecz suma ich ilości, więc funkcję zysku możemy określić w postaci $Z(x, y) = x + y$ (gdzie x i y to ilości obu dóbr). Można się też zastanowić nad dobrami *doskonale komplementarnymi*, czyli takimi, że każdy egzemplarz pierwszego dobra jest bezużyteczny bez egzemplarza drugiego dobra (np. prawy but i lewy but). Wtedy istotna jest ilość tego dobra, którego jest mniej, czyli $Z(x, y) = \min\{x, y\}$ (gdzie x i y to ilości obu dóbr).

Doskonała substytucja i doskonała komplementarność

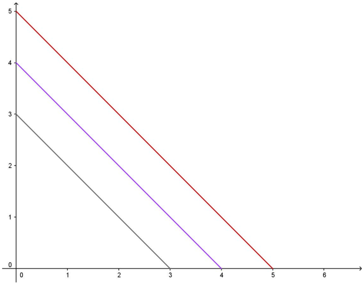


Krzywe obojętności dla dóbr doskonale substytucyjnych.

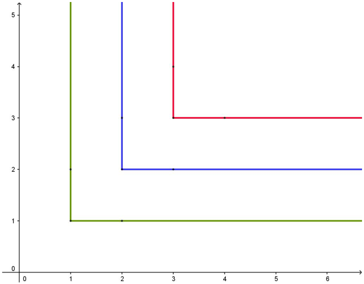


Krzywe obojętności dla dóbr doskonale komplementarnych.

Doskonała substytucja i doskonała komplementarność



Krzywe obojętności dla dóbr doskonale substytucyjnych.



Krzywe obojętności dla dóbr doskonale komplementarnych.

Preferencje konsumenta - wyjaśnienie

Konstrukcję krzywych obojętności i relacji preferencji przedstawiłem w kontekście funkcji zysku producenta, aczkolwiek stosuje się ją częściej w kontekście funkcji użyteczności konsumenta. Przykład producenta jest bardziej klarowny i wymaga mniej filozoficznych dywagacji o istocie używanych obiektów. Teraz jesteśmy gotowi przejść do bardziej klasycznej, choć ciut bardziej wyrafinowanej wersji zagadnienia.

Preferencje konsumenta - relacja preferencji

Dla uproszczenia, załóżmy, że konsument wybiera spośród koszyków złożonych z pewnych ilości dwu dóbr. Dopuszczamy zadłużenie, więc koszyki (x, y) pochodzą z przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Zakładamy, że konsument niczego nie produkuje ze wspomnianych dóbr, dlatego nie będziemy budować modelu od jakiejś funkcji „zysku", ale od relacji preferencji konsumenta (którą w praktyce, poprzez jego wybory, można zaobserwować).

Preferencje konsumenta - relacja preferencji

Dla uproszczenia, załóżmy, że konsument wybiera spośród koszyków złożonych z pewnych ilości dwu dóbr. Dopuszczamy zadłużenie, więc koszyki (x, y) pochodzą z przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Zakładamy, że konsument niczego nie produkuje ze wspomnianych dóbr, dlatego nie będziemy budować modelu od jakiejś funkcji „zysku", ale od relacji preferencji konsumenta (którą w praktyce, poprzez jego wybory, można zaobserwować).
Analogicznie do poprzedniego modelu, zapisujemy, że koszyk (x_1, y_1) jest nie bardziej preferowany przez konsumenta niż koszyk (x_2, y_2) następująco: $(x_1, y_1) \precsim (x_2, y_2)$. Relację $\precsim$, będącą podzbiorem $\mathbb{R}^2$ nazywamy *relacją preferencji konsumenta* (czasem dodając na początku słowo: racjonalną).

Preferencje konsumenta - relacja obojętności

Jeśli konsument ocenia obydwa koszyki równo (czyli $(x_1, y_1) \precsim (x_2, y_2)$ i $(x_2, y_2) \precsim (x_1, y_1)$), to zapisujemy: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ i tę relację również nazywamy *relacją obojętności*.

Preferencje konsumenta - funkcja użyteczności

Ze względów technicznych (i dlatego, że się da) zazwyczaj konstruuje się funkcję analogiczną do funkcji zysku producenta. Zakłada się, że konsument również coś produkuje z danego koszyka dóbr: tzw. *użyteczność* (dla siebie samego).

Preferencje konsumenta - funkcja użyteczności

Ze względów technicznych (i dlatego, że się da) zazwyczaj konstruuje się funkcję analogiczną do funkcji zysku producenta. Zakłada się, że konsument również coś produkuje z danego koszyka dóbr: tzw. *użyteczność* (dla siebie samego). W swoich wyborach, konsument kieruje się maksymalizacją użyteczności.

Preferencje konsumenta - funkcja użyteczności

Ze względów technicznych (i dlatego, że się da) zazwyczaj konstruuje się funkcję analogiczną do funkcji zysku producenta. Zakłada się, że konsument również coś produkuje z danego koszyka dóbr: tzw. *użyteczność* (dla siebie samego). W swoich wyborach, konsument kieruje się maksymalizacją użyteczności.

Funkcja użyteczności

Dla zadanej relacji preferencji $\precsim$, funkcja $u(x, y)$ jest funkcją użyteczności danego konsumenta, jeśli $u(x_1, y_1) \leqslant u(x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1) \precsim (x_2, y_2)$ dla każdych liczb $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

Preferencje konsumenta - wieloznaczność funkcji użyteczności

Co ważne, funkcja użyteczności dla danej relacji preferencji nie jest jedyna. Na przykład, jeśli u jest funkcją użyteczności dla relacji preferencji $\precsim$, a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją rosnącą, to $f \circ u$ jest również funkcją użyteczności dla relacji preferencji $\precsim$.
Przykład Jeśli $u(x, y) = xy$ jest funkcją użyteczności dla relacji preferencji $\precsim$, to tę samą relację preferencji można modelować za pomocą funkcji użyteczności takich jak $u_0(x, y) = 1000xy$, $u_1(x, y) = (xy)^3$, $u_2(x, y) = 2^{xy}$, czy $u_3(x, y) = \operatorname{arctg} xy$.

Preferencje konsumenta - wieloznaczność funkcji użyteczności

Co ważne, funkcja użyteczności dla danej relacji preferencji nie jest jedyna. Na przykład, jeśli u jest funkcją użyteczności dla relacji preferencji $\precsim$, a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją rosnącą, to $f \circ u$ jest również funkcją użyteczności dla relacji preferencji $\precsim$.
Przykład Jeśli $u(x, y) = xy$ jest funkcją użyteczności dla relacji preferencji $\precsim$, to tę samą relację preferencji można modelować za pomocą funkcji użyteczności takich jak $u_0(x, y) = 1000xy$, $u_1(x, y) = (xy)^3$, $u_2(x, y) = 2^{xy}$, czy $u_3(x, y) = \operatorname{arctg} xy$.
Poza tym - wszystko działa dokładnie tak samo jak w modelu preferencji producenta. W szczególności, izokwanty funkcji użyteczności nazywa się *krzywymi obojętności* konsumenta.

Funkcja użyteczności - uwagi metodologiczne

Warto pamiętać (choć czasem się zapomina), że funkcja użyteczności jest tylko wygodną abstrakcją, ułatwiającą modelowanie. Nic nie wskazuje na to, by konsumenci, dokonując wyborów ekonomicznych, obliczali wartości użyteczności - raczej kierują się jedynie porównaniem dóbr (czyli relacją preferencji). Nawet stwierdzenia typu „pomidora mogę wymienić na 3 ogórki" nie świadczą o tym, że użyteczność pomidora dla wypowiadającego tę opinię konsumenta jest 3 razy większa od użyteczności ogórka (wręcz zazwyczaj tak nie jest ze względu na tzw. prawo malejącej użyteczności krańcowej).

Funkcja użyteczności - przykład złego zastosowania

Załóżmy, że preferencje zarówno konsumenta A, jak i konsumenta B są dane relacją: $(x_1, y_1) \precsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_1 \leqslant x_2 y_2$. Naturalnymi funkcjami użyteczności są $u_A(x, y) = u_B(x, y) = xy$.

Funkcja użyteczności - przykład złego zastosowania

Załóżmy, że preferencje zarówno konsumenta A, jak i konsumenta B są dane relacją: $(x_1, y_1) \precsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_1 \leqslant x_2 y_2$. Naturalnymi funkcjami użyteczności są $u_A(x, y) = u_B(x, y) = xy$. Jeśli konsument A posiada koszyk dóbr $(6, 1)$, a konsument B ma koszyk dóbr $(3, 5)$, to wydaje się, że konsument B osiąga ze swojego koszyka dóbr większą użyteczność niż konsument A (bo $u(6, 1) = 6 < 15 = u(3, 5)$).

Funkcja użyteczności - przykład złego zastosowania

Załóżmy, że preferencje zarówno konsumenta A, jak i konsumenta B są dane relacją: $(x_1, y_1) \precsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_1 \leqslant x_2 y_2$. Naturalnymi funkcjami użyteczności są $u_A(x, y) = u_B(x, y) = xy$. Jeśli konsument A posiada koszyk dóbr $(6, 1)$, a konsument B ma koszyk dóbr $(3, 5)$, to wydaje się, że konsument B osiąga ze swojego koszyka dóbr większą użyteczność niż konsument A (bo $u(6, 1) = 6 < 15 = u(3, 5)$). Jednakże, konsumentowi A można równie dobrze przypisać funkcję użyteczności $u_A(x, y) = 10xy$

Funkcja użyteczności - przykład złego zastosowania

Załóżmy, że preferencje zarówno konsumenta A, jak i konsumenta B są dane relacją: $(x_1, y_1) \precsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_1 \leqslant x_2 y_2$. Naturalnymi funkcjami użyteczności są $u_A(x, y) = u_B(x, y) = xy$. Jeśli konsument A posiada koszyk dóbr $(6, 1)$, a konsument B ma koszyk dóbr $(3, 5)$, to wydaje się, że konsument B osiąga ze swojego koszyka dóbr większą użyteczność niż konsument A (bo $u(6, 1) = 6 < 15 = u(3, 5)$). Jednakże, konsumentowi A można równie dobrze przypisać funkcję użyteczności $u_A(x, y) = 10xy$ i wtedy nagle staje się „bogatszy w użyteczność" od konsumenta B (bo $u_A(6, 1) = 60 > 15 = u(3, 5)$).

Funkcja użyteczności - przykład złego zastosowania

Załóżmy, że preferencje zarówno konsumenta A, jak i konsumenta B są dane relacją: $(x_1, y_1) \precsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_1 \leqslant x_2 y_2$. Naturalnymi funkcjami użyteczności są $u_A(x, y) = u_B(x, y) = xy$. Konsument A posiada koszyk dóbr $(6, 1)$, a konsument B ma koszyk dóbr $(3, 5)$.

Funkcja użyteczności - przykład złego zastosowania

Załóżmy, że preferencje zarówno konsumenta A, jak i konsumenta B są dane relacją: $(x_1, y_1) \precsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_1 \leqslant x_2 y_2$. Naturalnymi funkcjami użyteczności są $u_A(x, y) = u_B(x, y) = xy$. Konsument A posiada koszyk dóbr $(6, 1)$, a konsument B ma koszyk dóbr $(3, 5)$. Zauważmy, że suma użyteczności tych koszyków (naturalna „wspólna użyteczność") jest mniejsza, niż gdybyśmy dobro drugie w ilości 1 przekazali od konsumenta B do konsumenta A (bo $u(6, 1) + u(3, 5) = 21 < 24 = u(6, 2) + u(3, 4)$).

Funkcja użyteczności - przykład złego zastosowania

Załóżmy, że preferencje zarówno konsumenta A, jak i konsumenta B są dane relacją: $(x_1, y_1) \precsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_1 \leqslant x_2 y_2$. Naturalnymi funkcjami użyteczności są $u_A(x, y) = u_B(x, y) = xy$. Konsument A posiada koszyk dóbr $(6, 1)$, a konsument B ma koszyk dóbr $(3, 5)$. Zauważmy, że suma użyteczności tych koszyków (naturalna „wspólna użyteczność") jest mniejsza, niż gdybyśmy dobro drugie w ilości 1 przekazali od konsumenta B do konsumenta A (bo $u(6, 1) + u(3, 5) = 21 < 24 = u(6, 2) + u(3, 4)$). Z drugiej strony, wybory konsumenta B mogą być równie dobrze opisane funkcją użyteczności $u_B(x, y) = 100xy$ i wtedy wspomniana „redystrybucja" dobra drugiego zmniejsza sumę użyteczności (bo $u(6, 1) + u_B(3, 5) = 1506 > 1212 = u(6, 2) + u_B(3, 4)$).

Funkcja użyteczności - uwagi metodologiczne

Wnioskiem z tego przykładu jest fakt, że o ile funkcji użyteczności możemy używać do modelowania wyborów pojedynczego konsumenta, to nie możemy (przynajmniej w matematycznie rozsądny sposób) w ten sposób porównywać użyteczności dwóch różnych konsumentów lub wykonywać na nich działań. Można sobie wyobrazić, że „utyle" konsumenta A są innymi jednostkami niż „utyle" konsumenta B i ich porównywanie lub dodawanie jest równie uprawnione jak porównywanie lub dodawanie metrów z sekundami.

Funkcja użyteczności - uwagi metodologiczne

Wnioskiem z tego przykładu jest fakt, że o ile funkcji użyteczności możemy używać do modelowania wyborów pojedynczego konsumenta, to nie możemy (przynajmniej w matematycznie rozsądny sposób) w ten sposób porównywać użyteczności dwóch różnych konsumentów lub wykonywać na nich działań. Można sobie wyobrazić, że „utyle” konsumenta A są innymi jednostkami niż „utyle” konsumenta B i ich porównywanie lub dodawanie jest równie uprawnione jak porównywanie lub dodawanie metrów z sekundami. Istnieją nurty w ekonomii próbujące ominąć to ograniczenie (np. utylitaryzm), jednak prowadzi to najczęściej do trudnych do wyjaśnienia paradoksów.

Funkcja użyteczności - inny przykład anty-utylitarny

Załóżmy, że badamy użyteczność, jaką dwie osoby czerpią z chodzenia po górach.

Funkcja użyteczności - inny przykład anty-utylitarny

Załóżmy, że badamy użyteczność, jaką dwie osoby czerpią z chodzenia po górach. Osoba A lubi przede wszystkim spędzać czas w górach, więc użyteczność wyprawy w góry mierzy ilością czasu jaki tam spędziła (w godzinach). Osoba B jest „wyczynowcem”, który przede wszystkim ceni osiągnięcia, więc użyteczność wyprawy w góry mierzy wysokością najwyższego szczytu, jaki podczas wyprawy został zdobyty (w metrach n.p.m.).

Funkcja użyteczności - inny przykład anty-utylitarny

Załóżmy, że badamy użyteczność, jaką dwie osoby czerpią z chodzenia po górach. Osoba A lubi przede wszystkim spędzać czas w górach, więc użyteczność wyprawy w góry mierzy ilością czasu jaki tam spędziła (w godzinach). Osoba B jest „wyczynowcem", który przede wszystkim ceni osiągnięcia, więc użyteczność wyprawy w góry mierzy wysokością najwyższego szczytu, jaki podczas wyprawy został zdobyty (w metrach n.p.m.).
Załóżmy, że w pewien weekend osoba A osiągnęła użyteczność wyprawy w góry 8, a osoba B użyteczność 2000.

Funkcja użyteczności - inny przykład anty-utylitarny

Załóżmy, że badamy użyteczność, jaką dwie osoby czerpią z chodzenia po górach. Osoba A lubi przede wszystkim spędzać czas w górach, więc użyteczność wyprawy w góry mierzy ilością czasu jaki tam spędziła (w godzinach). Osoba B jest „wyczynowcem", który przede wszystkim ceni osiągnięcia, więc użyteczność wyprawy w góry mierzy wysokością najwyższego szczytu, jaki podczas wyprawy został zdobyty (w metrach n.p.m.).

Załóżmy, że w pewien weekend osoba A osiągnęła użyteczność wyprawy w góry 8, a osoba B użyteczność 2000. Czy możemy powiedzieć, że osoba B osiągnęła większą (albo mniejszą) użyteczność?

Funkcja użyteczności - inny przykład anty-utylitarny

Załóżmy, że badamy użyteczność, jaką dwie osoby czerpią z chodzenia po górach. Osoba A lubi przede wszystkim spędzać czas w górach, więc użyteczność wyprawy w góry mierzy ilością czasu jaki tam spędziła (w godzinach). Osoba B jest „wyczynowcem", który przede wszystkim ceni osiągnięcia, więc użyteczność wyprawy w góry mierzy wysokością najwyższego szczytu, jaki podczas wyprawy został zdobyty (w metrach n.p.m.).
Załóżmy, że w pewien weekend osoba A osiągnęła użyteczność wyprawy w góry 8, a osoba B użyteczność 2000. Czy możemy powiedzieć, że osoba B osiągnęła większą (albo mniejszą) użyteczność? Czy możemy powiedzieć, że sytuacja ta jest lepsza lub gorsza niż taka, w której osoba A osiągnęła użyteczność 9, a osoba B użyteczność 1900?

Funkcja użyteczności - inny przykład anty-utylitarny

Załóżmy, że badamy użyteczność, jaką dwie osoby czerpią z chodzenia po górach. Osoba A lubi przede wszystkim spędzać czas w górach, więc użyteczność wyprawy w góry mierzy ilością czasu jaki tam spędziła (w godzinach). Osoba B jest „wyczynowcem", który przede wszystkim ceni osiągnięcia, więc użyteczność wyprawy w góry mierzy wysokością najwyższego szczytu, jaki podczas wyprawy został zdobyty (w metrach n.p.m.).
Załóżmy, że w pewien weekend osoba A osiągnęła użyteczność wyprawy w góry 8, a osoba B użyteczność 2000. Czy możemy powiedzieć, że osoba B osiągnęła większą (albo mniejszą) użyteczność? Czy możemy powiedzieć, że sytuacja ta jest lepsza lub gorsza niż taka, w której osoba A osiągnęła użyteczność 9, a osoba B użyteczność 1900? Nie sądzę, by jakakolwiek poważna nauka podjęła się kiedykolwiek odpowiedzi na któreś z tych pytań.

Funkcja użyteczności - uwagi metodologiczne

Jak widać, założenie o tym, że funkcje użyteczności są bytami rzeczywistymi może prowadzić do absolutnie dowolnych (nawet przeciwstawnych) wniosków. Niemniej, ostrożnie używane, mogą w wielu okolicznościach ułatwić obliczenia. Np. maksymalna wartość funkcji użyteczności na jakimś zbiorze zawsze wypada dla tych samych koszyków towarów, niezależnie jaką funkcję użyteczności wybierzemy, dlatego analiza funkcji użyteczności w zagadnieniach optymalizacyjnych (dla pojedynczego konsumenta) jest uprawniona.

Relacja obojętności - uwagi metodologiczne

Specjaliści od aksjomatycznych podstaw ekonomii nadal się spierają, czy również relacja obojętności konsumenta nie jest czasem tylko abstrakcyjną konstrukcją, ułatwiającą matematyczną interpretację: obserwując wybory konsumenta, zawsze widzimy, że wybiera jakieś dobro kosztem innego, a zaobserwowanie tego, że „jest mu wszystko jedno” jest niezwykle trudne.

Relacje preferencji - uwaga techniczna

Modele z tej prezentacji można z łatwością dostosować do sytuacji, kiedy dóbr bądź czynników produkcji jest więcej. Ograniczyliśmy się do przypadku dwuargumentowego ze względu na prostotę zapisu i rysowania wykresów.