4. Reguła de L'Hospitala

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Reguła de L'Hospitala - motywacja

Ta część wykładu poświęcona jest bardzo skutecznemu sposobowi liczenia granic w sytuacjach, gdy licząc innymi metodami otrzymujemy symbole nieoznaczone, czyli regule de L'Hospitala.

Reguła de L'Hospitala - wypowiedź

Reguła de L'Hospitala

Jeśli funkcje f oraz g są różniczkowalne w otoczeniu $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ i zachodzi: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0([\frac{0}{0}])$ lub $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty([\frac{\pm\infty}{\pm\infty}])$ to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Oczywiście, twierdzenie to działa też dla granic jednostronnych.

Reguła de L'Hospitala - wypowiedź

Reguła de L'Hospitala

Jeśli funkcje f oraz g są różniczkowalne w otoczeniu $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ i zachodzi: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0([\frac{0}{0}])$ lub $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty([\frac{\pm\infty}{\pm\infty}])$ to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Oczywiście, twierdzenie to działa też dla granic jednostronnych.

Zastosowanie reguły de L'Hospitala oznaczamy symbolem $\stackrel{H}{=}$.

Reguła de L'Hospitala - przykład 1

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}.$$

Oczywiście, umiemy obliczyć tę granicę w inny sposób. Ale za pomocą reguły de L'Hospitala możemy zrobić tak:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 1

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}.$$

Oczywiście, umiemy obliczyć tę granicę w inny sposób. Ale za pomocą reguły de L'Hospitala możemy zrobić tak:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=}$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 1

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}.$$

Oczywiście, umiemy obliczyć tę granicę w inny sposób. Ale za pomocą reguły de L'Hospitala możemy zrobić tak:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 2} \frac{2x - 3}{2x} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 1

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}.$$

Oczywiście, umiemy obliczyć tę granicę w inny sposób. Ale za pomocą reguły de L'Hospitala możemy zrobić tak:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x - 3}{2x} = \frac{1}{4}.$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 2

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Tej granicy nie umieliśmy obliczyć w inny sposób, a jest ona bardzo ważna (wręcz warto ją zapamiętać):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 2

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Tej granicy nie umieliśmy obliczyć w inny sposób, a jest ona bardzo ważna (wręcz warto ją zapamiętać):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 2

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Tej granicy nie umieliśmy obliczyć w inny sposób, a jest ona bardzo ważna (wręcz warto ją zapamiętać):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 2

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Tej granicy nie umieliśmy obliczyć w inny sposób, a jest ona bardzo ważna (wręcz warto ją zapamiętać):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 3

Czasem regułę de L'Hospitala trzeba zastosować w jednym zadaniu więcej niż raz.

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 3

Czasem regułę de L'Hospitala trzeba zastosować w jednym zadaniu więcej niż raz.

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=}$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 3

Czasem regułę de L'Hospitala trzeba zastosować w jednym zadaniu więcej niż raz.

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{2x} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 3

Czasem regułę de L'Hospitala trzeba zastosować w jednym zadaniu więcej niż raz.

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=}$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 3

Czasem regułę de L'Hospitala trzeba zastosować w jednym zadaniu więcej niż raz.

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x - 3}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1.$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 4

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)-x+2}{2x^2-8x+8}.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)-x+2}{2x^2-8x+8} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 4

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1) - x + 2}{2x^2 - 8x + 8}.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1) - x + 2}{2x^2 - 8x + 8} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=}$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 4

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)-x+2}{2x^2-8x+8}.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)-x+2}{2x^2-8x+8} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}-1}{4x-8} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 4

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)-x+2}{2x^2-8x+8}.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)-x+2}{2x^2-8x+8} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}-1}{4x-8} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=}$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 4

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)-x+2}{2x^2-8x+8}.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)-x+2}{2x^2-8x+8} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}-1}{4x-8} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{4} = \frac{-1}{4}.$$

Reguła de L'Hospitala - symbol $[0 \cdot \infty]$

Twierdzenie de L'Hospitala można zastosować również do innych symboli nieoznaczonych niż $[\frac{\infty}{\infty}]$ i $[\frac{0}{0}]$.

Reguła de L'Hospitala - symbol $[0 \cdot \infty]$

Twierdzenie de L'Hospitala można zastosować również do innych symboli nieoznaczonych niż $[\frac{\infty}{\infty}]$ i $[\frac{0}{0}]$.
Na przykład w sytuacji, gdy mamy do obliczenia granicę $f(x) \cdot g(x)$, typu $[0 \cdot \infty]$, możemy ją przekształcić do postaci $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ (typu $[\frac{0}{0}]$) lub $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ (typu $[\frac{\infty}{\infty}]$) .

Reguła de L'Hospitala - przykład 5

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x.$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 5

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x.$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \left[(-\infty) \cdot 0\right] =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 5

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x.$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \Big[(-\infty) \cdot 0\Big] = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=}$$

$$\stackrel{H}{=}$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 5

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to -\infty} xe^x.$$

$$\lim_{x\to -\infty} xe^x = \left[(-\infty)\cdot 0\right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 5

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x.$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \left[(-\infty)\cdot 0\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0.$$

Reguła de L'Hospitala - symbole $[1^\infty]$, $[0^0]$ i $[\infty^0]$

Z kolei granice $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$, które okazują się być typu $[1^\infty]$, $[0^0]$ albo $[\infty^0]$ możemy przekształcić do postaci $e^{\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}[\ln f(x)^{g(x)}]}$, a następnie $e^{\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}[g(x)\cdot\ln f(x)]}$ i granica w wykładniku jest typu: $[\infty\cdot 0]$.

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to 0} x^{\sin x}.$$

$$\lim_{x \to 0} x^{\sin x} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to 0} x^{\sin x}.$$

$$\lim_{x \to 0} x^{\sin x} = \left[0^0\right] =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to 0} x^{\sin x}.$$

$$\lim_{x \to 0} x^{\sin x} = \left[0^0\right] = \lim_{x \to 0} e^{\ln x^{\sin x}} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x}.$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \left[0^0\right] = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x}.$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x}.$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \left[0^0\right] = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x}.$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \left[0^0\right] = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = \left[0 \cdot (-\infty)\right] =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x}.$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \left[0^0\right] = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = \left[0\cdot(-\infty)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\ln x}} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x}.$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \left[0^0\right] = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = \left[0\cdot(-\infty)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\ln x}} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=}$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x}.$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \left[0^0\right] = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = \left[0\cdot(-\infty)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\ln x}} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x}.$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \left[0^0\right] = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = \left[0\cdot(-\infty)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\ln x}} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0} \cos x \cdot \ln^2 x \cdot x.$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x\to 0} \ln^2 x \cdot x =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x \to 0} \ln^2 x \cdot x = \left[-\infty \cdot 0 \right] =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x \to 0} \ln^2 x \cdot x = \left[-\infty \cdot 0 \right] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=}$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x\to 0} \ln^2 x \cdot x = \left[-\infty \cdot 0\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \ln^2 x\cdot x = \left[-\infty\cdot 0\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x\to 0} \ln^2 x \cdot x = \left[-\infty \cdot 0\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \ln^2 x \cdot x = \left[-\infty \cdot 0\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{2 \ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} -\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \ln^2 x\cdot x = \left[-\infty\cdot 0\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2\ln x\cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} -\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\longrightarrow 0} 2x =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \ln^2 x \cdot x = \left[-\infty \cdot 0\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} -\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\longrightarrow 0} 2x = 0.$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x\to 0} \ln^2 x \cdot x = \left[-\infty \cdot 0\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} 2x = 0.$$

Stąd:

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = -\lim_{x\to 0} \cos x \cdot \ln^2 x \cdot x =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x\to 0} \ln^2 x \cdot x = \left[-\infty \cdot 0\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} 2x = 0.$$

Stąd:

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = -\lim_{x\to 0} \cos x \cdot \ln^2 x \cdot x = -\left[1 \cdot 0\right] = 0,$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x\to 0} \ln^2 x \cdot x = \left[-\infty \cdot 0\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} 2x = 0.$$

Stąd:

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = -\lim_{x\to 0} \cos x \cdot \ln^2 x \cdot x = -\left[1 \cdot 0\right] = 0,$$

i

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 6

Pomocniczo obliczmy:

$$\lim_{x\to 0} \ln^2 x \cdot x = \left[-\infty \cdot 0\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} 2x = 0.$$

Stąd:

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = -\lim_{x\to 0} \cos x \cdot \ln^2 x \cdot x = -\left[1 \cdot 0\right] = 0,$$

i

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x} = e^0 = 1.$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 7

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 7

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 7

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 7

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 7

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=}$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 7

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 7

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 7

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Stąd

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \ln x} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład 7

Zadanie

Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x}.$$

Teraz obliczamy granicę wykładnika

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Stąd

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1.$$

Reguła de L'Hospitala - uwagi o możliwych błędach

Doświadczenie sprawdzianów i egzaminów wskazuje, że stosując regułę de L'Hospitala, łatwo popełnić jeden z następujących błędów:

Reguła de L'Hospitala - uwagi o możliwych błędach

Doświadczenie sprawdzianów i egzaminów wskazuje, że stosując regułę de L'Hospitala, łatwo popełnić jeden z następujących błędów:

- Stosując regułę de L'Hospitala liczymy pochodną licznika i mianownika osobno. Dlatego należy uważać, by nie pomylić wzoru de L'Hospitala z wzorem na pochodną ilorazu.

Reguła de L'Hospitala - uwagi o możliwych błędach

Doświadczenie sprawdzianów i egzaminów wskazuje, że stosując regułę de L'Hospitala, łatwo popełnić jeden z następujących błędów:

- Stosując regułę de L'Hospitala liczymy pochodną licznika i mianownika osobno. Dlatego należy uważać, by nie pomylić wzoru de L'Hospitala z wzorem na pochodną ilorazu.
- Zanim zastosuje się regułę de L'Hospitala, należy sprawdzić, czy spełnione są jej założenia (czyli, jakie są granice licznika i mianownika).

Reguła de L'Hospitala - przykład błędnego zastosowania

Zobaczmy, jaki błąd można popełnić, przy obliczaniu tak prostej granicy jak:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \overset{H}{=}$$

Reguła de L'Hospitala - przykład błędnego zastosowania

Zobaczmy, jaki błąd można popełnić, przy obliczaniu tak prostej granicy jak:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to -2} \frac{2x - 3}{2x} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład błędnego zastosowania

Zobaczmy, jaki błąd można popełnić, przy obliczaniu tak prostej granicy jak:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to -2} \frac{2x - 3}{2x} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}.$$

Jednak jednocześnie, wiemy, że:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} =$$

Reguła de L'Hospitala - przykład błędnego zastosowania

Zobaczmy, jaki błąd można popełnić, przy obliczaniu tak prostej granicy jak:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to -2} \frac{2x-3}{2x} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}.$$

Jednak jednocześnie, wiemy, że:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \left[\frac{12}{0}\right],$$

więc ta granica nie istnieje (a jednostronne nie są skończone).

Reguła de L'Hospitala - przykład błędnego zastosowania

Zobaczmy, jaki błąd można popełnić, przy obliczaniu tak prostej granicy jak:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to -2} \frac{2x - 3}{2x} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}.$$

Jednak jednocześnie, wiemy, że:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \left[\frac{12}{0}\right],$$

więc ta granica nie istnieje (a jednostronne nie są skończone). Skąd ta rozbieżność?

Reguła de L'Hospitala - przykład błędnego zastosowania

Zobaczmy, jaki błąd można popełnić, przy obliczaniu tak prostej granicy jak:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} \overset{H}{=} \lim_{x\to -2} \frac{2x-3}{2x} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}.$$

Jednak jednocześnie, wiemy, że:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \left[\frac{12}{0}\right],$$

więc ta granica nie istnieje (a jednostronne nie są skończone). Skąd ta rozbieżność? Otóż pierwszy sposób jest niepoprawny, gdyż nie wolno stosować reguły de L'Hospitala do granic typu $\left[\frac{a}{0}\right]$, a taką mamy w tym przypadku. Tak więc, przejście $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to -2} \frac{2x-3}{2x}$ było nieprawidłowe.