2. Ciągłość funkcji

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Ciągłość - motywacja

W naukach społecznych praktycznie nigdy nie mamy do czynienia z nieskończenie dokładnymi danymi. Powstaje pytanie, czy obliczenia na danych przybliżonych dadzą wynik, który jest dobrym przybliżeniem właściwego wyniku.

Ciągłość - motywacja

W naukach społecznych praktycznie nigdy nie mamy do czynienia z nieskończenie dokładnymi danymi. Powstaje pytanie, czy obliczenia na danych przybliżonych dadzą wynik, który jest dobrym przybliżeniem właściwego wyniku.
Na przykład, chcemy obliczyć na kalkulatorze przybliżoną wartość π^2. Wydaje się to oczywiste - wpisujemy przybliżoną wartość π i podnosimy ją do kwadratu.

Ciągłość - motywacja

W naukach społecznych praktycznie nigdy nie mamy do czynienia z nieskończenie dokładnymi danymi. Powstaje pytanie, czy obliczenia na danych przybliżonych dadzą wynik, który jest dobrym przybliżeniem właściwego wyniku.
Na przykład, chcemy obliczyć na kalkulatorze przybliżoną wartość π^2. Wydaje się to oczywiste - wpisujemy przybliżoną wartość π i podnosimy ją do kwadratu. Jednakże, warto sobie uświadomić, że wartość π w kalkulatorze nie jest dokładna (choć bliska). Skąd mamy zatem pewność, że po podniesieniu do kwadratu wartość przybliżona i rzeczywista się nie oddalą od siebie znacząco?

Ciągłość - motywacja

W naukach społecznych praktycznie nigdy nie mamy do czynienia z nieskończenie dokładnymi danymi. Powstaje pytanie, czy obliczenia na danych przybliżonych dadzą wynik, który jest dobrym przybliżeniem właściwego wyniku.
Na przykład, chcemy obliczyć na kalkulatorze przybliżoną wartość π^2. Wydaje się to oczywiste - wpisujemy przybliżoną wartość π i podnosimy ją do kwadratu. Jednakże, warto sobie uświadomić, że wartość π w kalkulatorze nie jest dokładna (choć bliska). Skąd mamy zatem pewność, że po podniesieniu do kwadratu wartość przybliżona i rzeczywista się nie oddalą od siebie znacząco? Zapewnia nam to równość:

$$\pi^2 = \lim_{x \to \pi} x^2,$$

która mówi, że w pobliżu π wartości funkcji x^2 są bliskie π^2.

Ciągłość - motywacja

Nie zawsze tak musi być.

Ciągłość - motywacja

Nie zawsze tak musi być. Rozważmy na przykład funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dla } x \neq 0 \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}.$$

Ciągłość - motywacja

Nie zawsze tak musi być. Rozważmy na przykład funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dla } x \neq 0 \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}.$$

Jeśli rozważymy $f(\epsilon)$, gdzie $\epsilon > 0$ (lub $\epsilon < 0$) jest bliskie zeru, nie otrzymamy wartości w pobliżu $f(0) = 0$ - lecz wręcz przeciwnie, bardzo dużą (na moduł) liczbę.

Ciągłość - motywacja

Nie zawsze tak musi być. Rozważmy na przykład funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dla } x \neq 0 \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}.$$

Jeśli rozważymy $f(\epsilon)$, gdzie $\epsilon > 0$ (lub $\epsilon < 0$) jest bliskie zeru, nie otrzymamy wartości w pobliżu $f(0) = 0$ - lecz wręcz przeciwnie, bardzo dużą (na moduł) liczbę.
Dlatego, określenie klasy funkcji, na których można bezpiecznie wykonywać przybliżone rachunki jest bardzo ważne. Taką klasę tworzą funkcje *ciągłe*.

Ciągłość - definicja

Rozważamy funkcje, których dziedziną i przeciwdziedziną jest pewien podzbiór $\mathbb{R}$ (dla innych funkcji definicje są bardzo podobne, jednak w ramach tego kursu praktycznie nie będziemy się badaniem ich ciągłości zajmować).

Ciągłość - definicja

Rozważamy funkcje, których dziedziną i przeciwdziedziną jest pewien podzbiór $\mathbb{R}$ (dla innych funkcji definicje są bardzo podobne, jednak w ramach tego kursu praktycznie nie będziemy się badaniem ich ciągłości zajmować).

Ciągłość w punkcie

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła* w punkcie $x_0 \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ istnieje i $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ciągłość - definicja

Rozważamy funkcje, których dziedziną i przeciwdziedziną jest pewien podzbiór $\mathbb{R}$ (dla innych funkcji definicje są bardzo podobne, jednak w ramach tego kursu praktycznie nie będziemy się badaniem ich ciągłości zajmować).

Ciągłość w punkcie

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła* w punkcie $x_0 \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ istnieje i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Wniosek - ciągłość „obustronna" w punkcie

Funkcja f jest *ciągła* w punkcie $x_0 \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Ciągłość - definicja

Ciągłość

Funkcja f jest *ciągła*, gdy jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Ciągłość - definicja

Ciągłość

Funkcja f jest *ciągła*, gdy jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

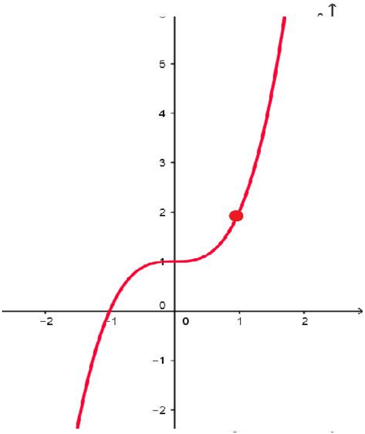
Ideę definicji można prosto zilustrować na wykresie - funkcja jest ciągła w punkcie dziedziny, jeśli wykres się w nim nie „rozrywa". Innymi słowy, jak to w szkole się mówiło: „jeśli można narysować bez odrywania długopisu - to jest ciągłe".

Ciągłość

Funkcja f jest *ciągła*, gdy jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

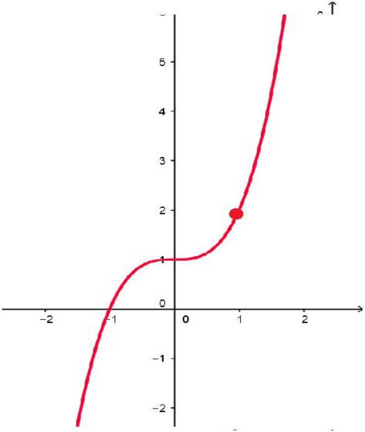
Ideę definicji można prosto zilustrować na wykresie - funkcja jest ciągła w punkcie dziedziny, jeśli wykres się w nim nie „rozrywa”. Innymi słowy, jak to w szkole się mówiło: „jeśli można narysować bez odrywania długopisu - to jest ciągłe”. Sprawa jest troszeczkę bardziej skomplikowana (zaraz to zobaczymy), ale w najprostszych przypadkach to się sprawdza.

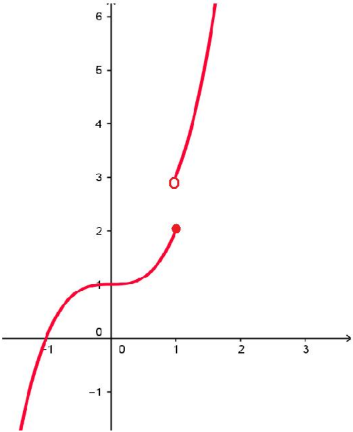
Ciągłość - ilustracja



Ta funkcja jest ciągła...

Ciągłość - ilustracja

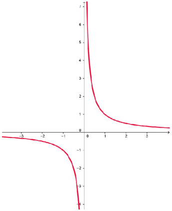




Ta funkcja jest ciągła... a ta nie.

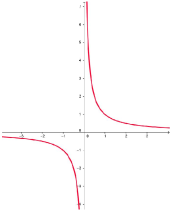
Ciągłość - definicja

Stwierdzenie: „jeśli można narysować bez odrywania długopisu - to jest ciągłe” nie mówi jednak całej prawdy:



Ciągłość - definicja

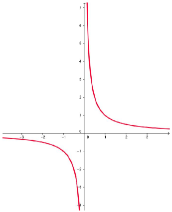
Stwierdzenie: „jeśli można narysować bez odrywania długopisu - to jest ciągłe" nie mówi jednak całej prawdy:



Na przykład, funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$, o dziedzinie $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (w przeciwieństwie do wcześniejszego przykładu)

Ciągłość - definicja

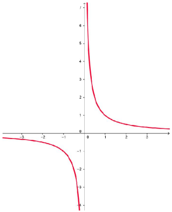
Stwierdzenie: „jeśli można narysować bez odrywania długopisu - to jest ciągłe” nie mówi jednak całej prawdy:



Na przykład, funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$, o dziedzinie $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (w przeciwieństwie do wcześniejszego przykładu) jest ciągła!

Ciągłość - definicja

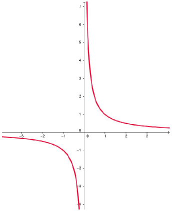
Stwierdzenie: „jeśli można narysować bez odrywania długopisu - to jest ciągłe” nie mówi jednak całej prawdy:



Na przykład, funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$, o dziedzinie $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (w przeciwieństwie do wcześniejszego przykładu) jest ciągła! Co do jej ciągłości nie ma wątpliwości w każdym punkcie różnym od zera, a choć wykres w 0 się „rozrywa” to 0 nie należy do dziedziny!.

Ciągłość - definicja

Stwierdzenie: „jeśli można narysować bez odrywania długopisu - to jest ciągłe” nie mówi jednak całej prawdy:



Na przykład, funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$, o dziedzinie $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (w przeciwieństwie do wcześniejszego przykładu) jest ciągła! Co do jej ciągłości nie ma wątpliwości w każdym punkcie różnym od zera, a choć wykres w 0 się „rozrywa” to 0 nie należy do dziedziny!.
Wniosek: Poza dziedziną funkcji nie badamy ciągłości!

Ciągłość - twierdzenia

Ciągłość funkcji elementarnych

Funkcje elementarne (czyli sumy, iloczyny, różnice, ilorazy i złożenia funkcji wielomianowych, potęgowych, wykładniczych, logarytmicznych, trygonometrycznych i cyklometrycznych) są ciągłe.

Ciągłość - twierdzenia

Ciągłość funkcji elementarnych

Funkcje elementarne (czyli sumy, iloczyny, różnice, ilorazy i złożenia funkcji wielomianowych, potęgowych, wykładniczych, logarytmicznych, trygonometrycznych i cyklometrycznych) są ciągłe.

Ciągłość działań na funkcjach

Sumy, iloczyny, różnice, ilorazy i złożenia funkcji ciągłych są ciągłe w ich dziedzinach.

Ciągłość - twierdzenia

Ciągłość funkcji elementarnych

Funkcje elementarne (czyli sumy, iloczyny, różnice, ilorazy i złożenia funkcji wielomianowych, potęgowych, wykładniczych, logarytmicznych, trygonometrycznych i cyklometrycznych) są ciągłe.

Ciągłość działań na funkcjach

Sumy, iloczyny, różnice, ilorazy i złożenia funkcji ciągłych są ciągłe w ich dziedzinach.

Zbiór funkcji ciągłych, których dziedziną jest zbiór A, a przeciwdziedziną zbiór B oznaczamy $\mathcal{C}(A, B)$. Domyślną przeciwdziedziną jest $\mathbb{R}$, dlatego zapis $\mathcal{C}(A)$ oznacza to samo co $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x + 3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1-x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x+3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

We wszystkich punktach, poza 0 i 1 funkcja jest ciągła, gdyż w otoczeniu takich punktów jest dana wzorem funkcji elementarnej. Dlatego zbadać trzeba tylko ciągłość funkcji w 0 i 1.

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x + 3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x + 3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0 + 1 = 1;$$

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1-x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x+3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0+1 = 1; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1-0 = 1.$$

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x + 3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0 + 1 = 1; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 - 0 = 1.$$

Zarem f jest ciągła w 0 (granice są równe sobie i wartości funkcji w punkcie).

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x + 3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x + 3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 - 1 = 0;$$

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1-x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x+3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1-1 = 0; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2\cdot 1 + 3 = 5.$$

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1-x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x+3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1-1 = 0; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2\cdot 1+3 = 5.$$

Zarem f nie jest ciągła w 1 (granice nie są sobie równe).

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x + 3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x + 3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Ostatecznie, f jest ciągła w $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a nie jest ciągła w 1.

Ciągłość - przykład

Przykład

Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 1 - x, & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2x + 3, & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Ostatecznie, f jest ciągła w $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a nie jest ciągła w 1. Zatem, funkcja f nie jest ciągła.

Funkcje nieciągłe - motywacja

Często w ekonomii zakładamy ciągłość różnych funkcji: kosztu, popytu, podaży, użyteczności itp. niejako domyślnie (i za chwilę dowiemy się, jakie są z tego pożytki). Zazwyczaj też tak będziemy postępować. Jednak warto sobie uświadomić, że funkcje nieciągłe nie są tak rzadkie i nietypowe, więc zwykle warto się zastanowić, czy założenie ciągłości ma sens w danej sytuacji.

Przykłady ekonomiczne funkcji nieciągłych

Przykłady ekonomiczne funkcji nieciągłych

- Niektóre taryfy operatorów telefonicznych, czy taksówek np. stała opłata za pierwsze kilka minut/kilometrów, a potem naliczanie za każdą rozpoczętą minutę/kilometr. Ceny zmieniają się skokowo w zależności od czasu.

Przykłady ekonomiczne funkcji nieciągłych

- Niektóre taryfy operatorów telefonicznych, czy taksówek np. stała opłata za pierwsze kilka minut/kilometrów, a potem naliczanie za każdą rozpoczętą minutę/kilometr. Ceny zmieniają się skokowo w zależności od czasu.
- Psychologiczne efekty wyższej pierwszej cyfry ceny lub większej liczby cyfr w cenie (stąd ceny typu $7,99$ PLN): popyt w zależności od ceny może zmieniać się skokowo (choć nie ma to większego efektu w skali makro).

Przykłady ekonomiczne funkcji nieciągłych

- Niektóre taryfy operatorów telefonicznych, czy taksówek np. stała opłata za pierwsze kilka minut/kilometrów, a potem naliczanie za każdą rozpoczętą minutę/kilometr. Ceny zmieniają się skokowo w zależności od czasu.
- Psychologiczne efekty wyższej pierwszej cyfry ceny lub większej liczby cyfr w cenie (stąd ceny typu $7,99$ PLN): popyt w zależności od ceny może zmieniać się skokowo (choć nie ma to większego efektu w skali makro).
- Funkcja mierząca ilość zapasów w magazynie w danym momencie czasu - co pewien czas do magazynu przychodzi dostawa, skokowo zmieniając wartość tej funkcji.

Przykłady ekonomiczne funkcji nieciągłych

- Niektóre taryfy operatorów telefonicznych, czy taksówek np. stała opłata za pierwsze kilka minut/kilometrów, a potem naliczanie za każdą rozpoczętą minutę/kilometr. Ceny zmieniają się skokowo w zależności od czasu.
- Psychologiczne efekty wyższej pierwszej cyfry ceny lub większej liczby cyfr w cenie (stąd ceny typu $7,99$ PLN): popyt w zależności od ceny może zmieniać się skokowo (choć nie ma to większego efektu w skali makro).
- Funkcja mierząca ilość zapasów w magazynie w danym momencie czasu - co pewien czas do magazynu przychodzi dostawa, skokowo zmieniając wartość tej funkcji.

Najczęściej jednak takie funkcje są ciągłe „prawie wszędzie”, czyli poza pojedynczymi, oddzielonymi od siebie punktami nieciągłości.

Ciekawostka

W istocie, choć większość znanych nam funkcji jest ciągła (przynajmniej „prawie wszędzie"), to gdy rozważymy przestrzeń wszystkich możliwych funkcji (rzeczywistych) to okazuje się, że funkcje ciągłe są wśród nich nieskończenie rzadkie!

Ciekawostka

W istocie, choć większość znanych nam funkcji jest ciągła (przynajmniej „prawie wszędzie”), to gdy rozważymy przestrzeń wszystkich możliwych funkcji (rzeczywistych) to okazuje się, że funkcje ciągłe są wśród nich nieskończenie rzadkie! Najbardziej „typowe” funkcje matematyczne to funkcje, które nigdzie nie są ciągłe.

Ciekawostka

W istocie, choć większość znanych nam funkcji jest ciągła (przynajmniej „prawie wszędzie”), to gdy rozważymy przestrzeń wszystkich możliwych funkcji (rzeczywistych) to okazuje się, że funkcje ciągłe są wśród nich nieskończenie rzadkie! Najbardziej „typowe” funkcje matematyczne to funkcje, które nigdzie nie są ciągłe. To, że uważamy je za „patologie” wynika tylko z naszego uproszczonego podejścia.

Ciekawostka

W istocie, choć większość znanych nam funkcji jest ciągła (przynajmniej „prawie wszędzie”), to gdy rozważymy przestrzeń wszystkich możliwych funkcji (rzeczywistych) to okazuje się, że funkcje ciągłe są wśród nich nieskończenie rzadkie! Najbardziej „typowe” funkcje matematyczne to funkcje, które nigdzie nie są ciągłe. To, że uważamy je za „patologie” wynika tylko z naszego uproszczonego podejścia. Przykładem funkcji nieciągłej w każdym punkcie jest tak zwana *funkcja Dirichleta*:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Ciągłość w ekonomii - motywacja

Dlaczego zatem często upraszcza się rzeczywistość, by założyć, że dane zjawiska ekonomiczne są (przynajmniej w dużej skali) ciągłe?

Ciągłość w ekonomii - motywacja

Dlaczego zatem często upraszcza się rzeczywistość, by założyć, że dane zjawiska ekonomiczne są (przynajmniej w dużej skali) ciągłe? Po pierwsze, ciągłość funkcji często gwarantuje możliwość rozwiązania zagadnienia często spotykanego w ekonomii lub finansach: problemu optymalizacji (czyli znajdowania największej/najmniejszej wartości danej wielkości pod pewnymi warunkami).

Ciągłość w ekonomii - motywacja

Dlaczego zatem często upraszcza się rzeczywistość, by założyć, że dane zjawiska ekonomiczne są (przynajmniej w dużej skali) ciągłe? Po pierwsze, ciągłość funkcji często gwarantuje możliwość rozwiązania zagadnienia często spotykanego w ekonomii lub finansach: problemu optymalizacji (czyli znajdowania największej/najmniejszej wartości danej wielkości pod pewnymi warunkami). Przykładami takich zagadnień, które napotkają Państwo w dalszej części studiów są maksymalizacja zysku jakiegoś przedsięwzięcia (w zależności np. od nakładów), czy minimalizacja kosztu jakiegoś zachowania.

Twierdzenie Weierstrassa

Twierdzenie Weierstrassa

Jeśli pewna funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, to f przyjmuje w tym przedziale wartość największą i najmniejszą.

Twierdzenie Weierstrassa

Twierdzenie Weierstrassa

Jeśli pewna funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, to f przyjmuje w tym przedziale wartość największą i najmniejszą.

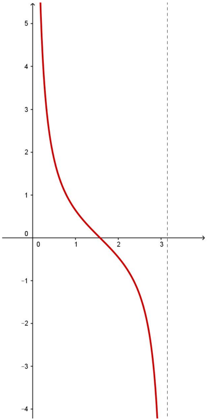
Uwaga! Bez założenia ciągłości funkcji f i domkniętości przedziału $[a, b]$ taki rezultat może nie działać.

Twierdzenie Weierstrassa

Jeśli pewna funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, to f przyjmuje w tym przedziale wartość największą i najmniejszą.

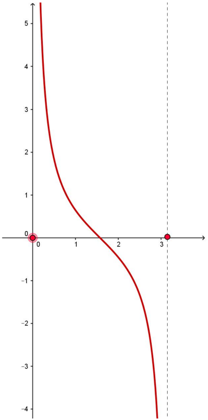
Uwaga! Bez założenia ciągłości funkcji f i domkniętości przedziału $[a, b]$ taki rezultat może nie działać. Dzięki temu twierdzeniu wiemy, że o ile zbiór możliwych argumentów funkcji jest domknięty i funkcja jest ciągła, to możemy dla tej funkcji rozwiązywać zagadnienia optymalizacyjne.

Twierdzenie Weierstrassa - przykład istotności założeń



Funkcja ctg na przedziale $(0, \pi)$ nie przyjmuje wartości najmniejszej, ani największej. Jednak przedział ten nie jest domknięty.

Twierdzenie Weierstrassa - przykład istotności założeń



Jeśli uzupełnimy definicję funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$ o $f(0) = f(\pi) = 0$ to na $[0, \pi]$ ta funkcja nadal nie osiąga wartości najmniejszej, ani największej. Powodem jest fakt, że f nie jest ciągła.

Twierdzenie Weierstrassa - konsekwencje

Konsekwencją twierdzenia Weierstrassa jest np. paradoksalna zależność przychodów ze sprzedaży od ceny sprzedawanego produktu.

Twierdzenie Weierstrassa - konsekwencje

Konsekwencją twierdzenia Weierstrassa jest np. paradoksalna zależność przychodów ze sprzedaży od ceny sprzedawanego produktu. Od pewnego poziomu przychody mogą wręcz spadać wraz ze wzrostem ceny.

Twierdzenie Weierstrassa - konsekwencje

Konsekwencją twierdzenia Weierstrassa jest np. paradoksalna zależność przychodów ze sprzedaży od ceny sprzedawanego produktu. Od pewnego poziomu przychody mogą wręcz spadać wraz ze wzrostem ceny. Działa to następująco: dla ceny zerowej przychody ze sprzedaży są zerowe.

Twierdzenie Weierstrassa - konsekwencje

Konsekwencją twierdzenia Weierstrassa jest np. paradoksalna zależność przychodów ze sprzedaży od ceny sprzedawanego produktu. Od pewnego poziomu przychody mogą wręcz spadać wraz ze wzrostem ceny. Działa to następująco: dla ceny zerowej przychody ze sprzedaży są zerowe. Podobnie dla jakiejś dużej ceny P, popyt na towar staje się zerowy, więc również przychód jest zerowy.

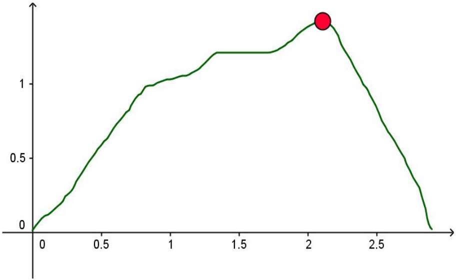
Twierdzenie Weierstrassa - konsekwencje

Konsekwencją twierdzenia Weierstrassa jest np. paradoksalna zależność przychodów ze sprzedaży od ceny sprzedawanego produktu. Od pewnego poziomu przychody mogą wręcz spadać wraz ze wzrostem ceny. Działa to następująco: dla ceny zerowej przychody ze sprzedaży są zerowe. Podobnie dla jakiejś dużej ceny P, popyt na towar staje się zerowy, więc również przychód jest zerowy. Zatem funkcja przychodu R spełnia własności $R(0) = R(P) = 0$. Zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa istnieje $x_{max} \in [0, P]$ takie, że $R(x_{max})$ jest maksymalnym możliwym do osiągnięcia przychodem - i, jeśli tylko kiedykolwiek udaje się sprzedać ten produkt, $R(x_{max}) > 0$, więc $x_{max} < P$.

Twierdzenie Weierstrassa - konsekwencje

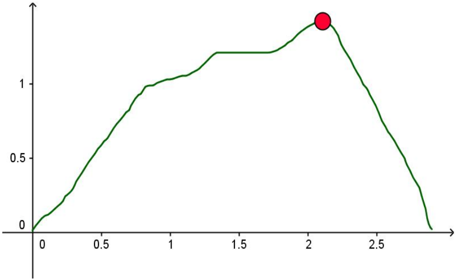
Konsekwencją twierdzenia Weierstrassa jest np. paradoksalna zależność przychodów ze sprzedaży od ceny sprzedawanego produktu. Od pewnego poziomu przychody mogą wręcz spadać wraz ze wzrostem ceny. Działa to następująco: dla ceny zerowej przychody ze sprzedaży są zerowe. Podobnie dla jakiejś dużej ceny P, popyt na towar staje się zerowy, więc również przychód jest zerowy. Zatem funkcja przychodu R spełnia własności $R(0) = R(P) = 0$. Zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa istnieje $x_{max} \in [0, P]$ takie, że $R(x_{max})$ jest maksymalnym możliwym do osiągnięcia przychodem - i, jeśli tylko kiedykolwiek udaje się sprzedać ten produkt, $R(x_{max}) > 0$, więc $x_{max} < P$. Wniosek: podnoszenie ceny ponad x_{max} może przynieść firmie tylko straty.

Twierdzenie Weierstrassa - konsekwencje



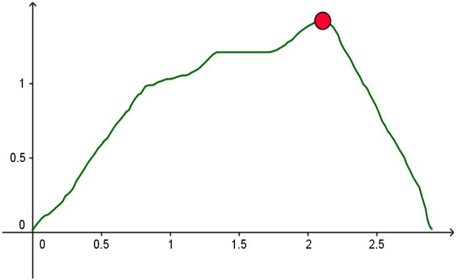
Szczególnym przypadkiem tej analizy jest tak zwany efekt Laffera, czyli paradoks zależności przychodów państwa od stawek podatkowych.

Twierdzenie Weierstrassa - konsekwencje



Szczególnym przypadkiem tej analizy jest tak zwany efekt Laffera, czyli paradoks zależności przychodów państwa od stawek podatkowych. Istnieje taki poziom opodatkowania (mniejszy niż 100%), że podnoszenie stawek podatkowych ponad ten poziom przynosi państwu tylko straty.

Twierdzenie Weierstrassa - konsekwencje



Szczególnym przypadkiem tej analizy jest tak zwany efekt Laffera, czyli paradoks zależności przychodów państwa od stawek podatkowych. Istnieje taki poziom opodatkowania (mniejszy niż 100%), że podnoszenie stawek podatkowych ponad ten poziom przynosi państwu tylko straty. Oczywiście, ten wynik jest wyłącznie jakościowy - nie wskazuje, jaka jest „optymalna” wysokość podatków i kiedy są one zbyt wysokie (dlatego efekt Laffera jest często nadużywany w dyskusjach).

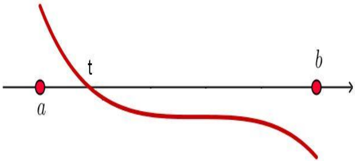
Własność Darboux

Drugie ważne twierdzenie związane z ciągłością jest dość intuicyjne:

Własność Darboux

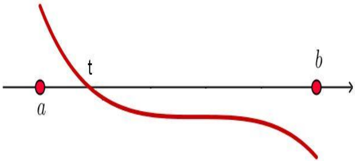
Jeśli pewna funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i $f(a)f(b) < 0$ (czyli $f(a)$ i $f(b)$ są przeciwnych znaków), to w tym przedziale istnieje miejsce zerowe funkcji f tj. punkt $t \in (a, b)$ taki, że $f(t) = 0$.

Własność Darboux



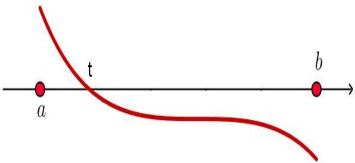
Twierdzenie formułuje precyzyjnie kwestię dość oczywistą: jeśli wykres funkcji ciągłej łączy punkty leżące powyżej i poniżej prostej $x = 0$ (tak naprawdę, jakiejkolwiek innej też), to wykres w pewnym miejscu musi przeciąć tą prostą (niewykluczone, że więcej niż raz).

Własność Darboux



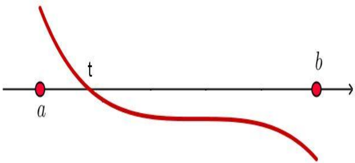
Twierdzenie formułuje precyzyjnie kwestię dość oczywistą: jeśli wykres funkcji ciągłej łączy punkty leżące powyżej i poniżej prostej $x = 0$ (tak naprawdę, jakiejkolwiek innej też), to wykres w pewnym miejscu musi przeciąć tą prostą (niewykluczone, że więcej niż raz). Jednak matematyczno-ekonomiczne wnioski z tego faktu są dość doniosłe.

Własność Darboux - wnioski



Po pierwsze, zauważmy, że bez własności Darboux nie mielibyśmy gwarancji, że znany ze szkoły (i części III wstępu) „graficzny” sposób rozwiązywania nierówności wielomianowych (i jakichkolwiek innych) jest poprawny.

Własność Darboux - wnioski



Po pierwsze, zauważmy, że bez własności Darboux nie mielibyśmy gwarancji, że znany ze szkoły (i części III wstępu) „graficzny” sposób rozwiązywania nierówności wielomianowych (i jakichkolwiek innych) jest poprawny. Dzięki niej mamy pewność, że funkcja wielomianowa (która jest ciągła) może zmienić znak TYLKO w swoich miejscach zerowych.

Własność Darboux - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x + 1 > 2^x,$$

wiedząc, że równość $x + 1 = 2^x$ zachodzi tylko dla $x = 0$ i $x = 1$.

Własność Darboux - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x + 1 > 2^x,$$

wiedząc, że równość $x + 1 = 2^x$ zachodzi tylko dla $x = 0$ i $x = 1$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x + 1 - 2^x$. Jest ona ciągła w $\mathbb{R}$. Mamy sprawdzić, kiedy $f(x) > 0$.

Własność Darboux - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x + 1 > 2^x,$$

wiedząc, że równość $x + 1 = 2^x$ zachodzi tylko dla $x = 0$ i $x = 1$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x + 1 - 2^x$. Jest ona ciągła w $\mathbb{R}$. Mamy sprawdzić, kiedy $f(x) > 0$. 0 i 1 - miejsca zerowe funkcji f dzielą dziedzinę tej funkcji na trzy części.

Własność Darboux - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x + 1 > 2^x,$$

wiedząc, że równość $x + 1 = 2^x$ zachodzi tylko dla $x = 0$ i $x = 1$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x + 1 - 2^x$. Jest ona ciągła w $\mathbb{R}$. Mamy sprawdzić, kiedy $f(x) > 0$. 0 i 1 - miejsca zerowe funkcji f dzielą dziedzinę tej funkcji na trzy części. Obliczmy po jednej wartości funkcji w każdej z tych części: $f(-1) =$

Własność Darboux - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x + 1 > 2^x,$$

wiedząc, że równość $x + 1 = 2^x$ zachodzi tylko dla $x = 0$ i $x = 1$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x + 1 - 2^x$. Jest ona ciągła w $\mathbb{R}$. Mamy sprawdzić, kiedy $f(x) > 0$. 0 i 1 - miejsca zerowe funkcji f dzielą dziedzinę tej funkcji na trzy części. Obliczmy po jednej wartości funkcji w każdej z tych części: $f(-1) = -\frac{1}{2} < 0$,
$f(\frac{1}{2}) =$

Własność Darboux - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x + 1 > 2^x,$$

wiedząc, że równość $x + 1 = 2^x$ zachodzi tylko dla $x = 0$ i $x = 1$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x + 1 - 2^x$. Jest ona ciągła w $\mathbb{R}$. Mamy sprawdzić, kiedy $f(x) > 0$. 0 i 1 - miejsca zerowe funkcji f dzielą dziedzinę tej funkcji na trzy części. Obliczmy po jednej wartości funkcji w każdej z tych części: $f(-1) = -\frac{1}{2} < 0$,
$f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$, $f(2) =$

Własność Darboux - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x + 1 > 2^x,$$

wiedząc, że równość $x + 1 = 2^x$ zachodzi tylko dla $x = 0$ i $x = 1$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x + 1 - 2^x$. Jest ona ciągła w $\mathbb{R}$. Mamy sprawdzić, kiedy $f(x) > 0$. 0 i 1 - miejsca zerowe funkcji f dzielą dziedzinę tej funkcji na trzy części. Obliczmy po jednej wartości funkcji w każdej z tych części: $f(-1) = -\frac{1}{2} < 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$, $f(2) = 3 - 4 = -1 < 0$.

Własność Darboux - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x + 1 > 2^x,$$

wiedząc, że równość $x + 1 = 2^x$ zachodzi tylko dla $x = 0$ i $x = 1$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x + 1 - 2^x$. Jest ona ciągła w $\mathbb{R}$. Mamy sprawdzić, kiedy $f(x) > 0$. 0 i 1 - miejsca zerowe funkcji f dzielą dziedzinę tej funkcji na trzy części. Obliczmy po jednej wartości funkcji w każdej z tych części: $f(-1) = -\frac{1}{2} < 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$, $f(2) = 3 - 4 = -1 < 0$. . Dla $x \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ musi mieć taki sam znak, jak $f(-1)$ (czyli ujemny). Gdyby zachodziło $f(x) > 0$, to między x a -1 musiałoby istnieć jakieś miejsce zerowe funkcji f, a tak nie jest.

Własność Darboux - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x + 1 > 2^x,$$

wiedząc, że równość $x + 1 = 2^x$ zachodzi tylko dla $x = 0$ i $x = 1$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x + 1 - 2^x$. Jest ona ciągła w $\mathbb{R}$. Mamy sprawdzić, kiedy $f(x) > 0$. 0 i 1 - miejsca zerowe funkcji f dzielą dziedzinę tej funkcji na trzy części. Obliczmy po jednej wartości funkcji w każdej z tych części: $f(-1) = -\frac{1}{2} < 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$, $f(2) = 3 - 4 = -1 < 0$. . Dla $x \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ musi mieć taki sam znak, jak $f(-1)$ (czyli ujemny). Gdyby zachodziło $f(x) > 0$, to między x a -1 musiałoby istnieć jakieś miejsce zerowe funkcji f, a tak nie jest. Analogicznie rozumując dostajemy, że $f(x) > 0$ dla $x \in (0, 1)$ i $f(x) < 0$ dla $x > 1$.

Własność Darboux - przykład

Zadanie

Rozwiązać nierówność:

$$x + 1 > 2^x,$$

wiedząc, że równość $x + 1 = 2^x$ zachodzi tylko dla $x = 0$ i $x = 1$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x + 1 - 2^x$. Jest ona ciągła w $\mathbb{R}$. Mamy sprawdzić, kiedy $f(x) > 0$. 0 i 1 - miejsca zerowe funkcji f dzielą dziedzinę tej funkcji na trzy części. Obliczmy po jednej wartości funkcji w każdej z tych części: $f(-1) = -\frac{1}{2} < 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$, $f(2) = 3 - 4 = -1 < 0$. . Dla $x \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ musi mieć taki sam znak, jak $f(-1)$ (czyli ujemny). Gdyby zachodziło $f(x) > 0$, to między x a -1 musiałoby istnieć jakieś miejsce zerowe funkcji f, a tak nie jest. Analogicznie rozumując dostajemy, że $f(x) > 0$ dla $x \in (0, 1)$ i $f(x) < 0$ dla $x > 1$. Zatem rozwiązaniem nierówności jest $x \in (0, 1)$.

Własność Darboux - wnioski

Po drugie, na własności Darboux opiera się najprostszy model opisujący istnienie rynkowej równowagi podaży i popytu przy pewnej cenie (jak również inne, bardziej wyrafinowane modele - ale tylko tym się tu zajmiemy).

Własność Darboux - wnioski

Po drugie, na własności Darboux opiera się najprostszy model opisujący istnienie rynkowej równowagi podaży i popytu przy pewnej cenie (jak również inne, bardziej wyrafinowane modele - ale tylko tym się tu zajmiemy).
Załóżmy, że mamy statyczny model rynku dla pewnego produktu z funkcjami popytu (Q) i podaży (S) od ceny P. Jak wiemy z mikroekonomii, funkcja popytu od ceny (poza szczególnymi przypadkami) jest malejąca, a funkcja podaży - rosnąca.

Własność Darboux - wnioski

Po drugie, na własności Darboux opiera się najprostszy model opisujący istnienie rynkowej równowagi podaży i popytu przy pewnej cenie (jak również inne, bardziej wyrafinowane modele - ale tylko tym się tu zajmiemy).
Załóżmy, że mamy statyczny model rynku dla pewnego produktu z funkcjami popytu (Q) i podaży (S) od ceny P. Jak wiemy z mikroekonomii, funkcja popytu od ceny (poza szczególnymi przypadkami) jest malejąca, a funkcja podaży - rosnąca. Można założyć, że dla ceny 0, $S(0) = 0$ (bo nie ma żadnego zysku ze sprzedaży), a $Q(0) > 0$ („Nieważne, co to, ale za darmo, więc poproszę dwa.").

Własność Darboux - wnioski

Po drugie, na własności Darboux opiera się najprostszy model opisujący istnienie rynkowej równowagi podaży i popytu przy pewnej cenie (jak również inne, bardziej wyrafinowane modele - ale tylko tym się tu zajmiemy).
Załóżmy, że mamy statyczny model rynku dla pewnego produktu z funkcjami popytu (Q) i podaży (S) od ceny P. Jak wiemy z mikroekonomii, funkcja popytu od ceny (poza szczególnymi przypadkami) jest malejąca, a funkcja podaży - rosnąca. Można założyć, że dla ceny 0, $S(0) = 0$ (bo nie ma żadnego zysku ze sprzedaży), a $Q(0) > 0$ („Nieważne, co to, ale za darmo, więc poproszę dwa."). Dla pewnej dużej ceny P_1 popyt spadnie do zera ($Q(P_1) = 0$), a podaż będzie dodatnia ($S(P_1) > 0$).

Własność Darboux - wnioski

$S(0) = 0$; $Q(0) > 0$; $Q(P_1) = 0$; $S(P_1) > 0$.

Własność Darboux - wnioski

$S(0) = 0$; $Q(0) > 0$; $Q(P_1) = 0$; $S(P_1) > 0$.
Teraz zdefiniujmy $f(x) = Q(x) - S(x)$ dla $x \in [0, P_1]$.

Własność Darboux - wnioski

$S(0) = 0$; $Q(0) > 0$; $Q(P_1) = 0$; $S(P_1) > 0$.
Teraz zdefiniujmy $f(x) = Q(x) - S(x)$ dla $x \in [0, P_1]$. Jasno widać, że $f(0) = Q(0) > 0$ i $f(P_1) = -S(P_1) < 0$, czyli $f(0)f(P_1) < 0$.

Własność Darboux - wnioski

$S(0) = 0$; $Q(0) > 0$; $Q(P_1) = 0$; $S(P_1) > 0$.
Teraz zdefiniujmy $f(x) = Q(x) - S(x)$ dla $x \in [0, P_1]$. Jasno widać, że $f(0) = Q(0) > 0$ i $f(P_1) = -S(P_1) < 0$, czyli $f(0)f(P_1) < 0$. Stąd i z własności Darboux istnieje $P_0 \in [0, P_1]$ takie, że $f(P_0) = 0$.

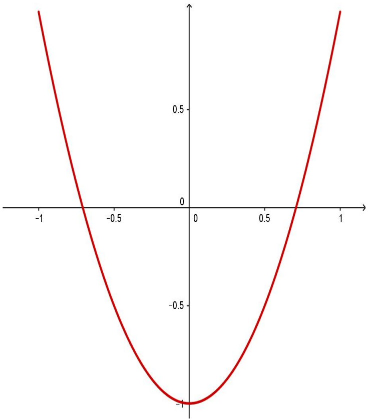
Własność Darboux - wnioski

$S(0) = 0$; $Q(0) > 0$; $Q(P_1) = 0$; $S(P_1) > 0$.
Teraz zdefiniujmy $f(x) = Q(x) - S(x)$ dla $x \in [0, P_1]$. Jasno widać, że $f(0) = Q(0) > 0$ i $f(P_1) = -S(P_1) < 0$, czyli $f(0)f(P_1) < 0$.
Stąd i z własności Darboux istnieje $P_0 \in [0, P_1]$ takie, że $f(P_0) = 0$.
Zatem $Q(P_0) - S(P_0) = 0$,

Własność Darboux - wnioski

$S(0) = 0$; $Q(0) > 0$; $Q(P_1) = 0$; $S(P_1) > 0$.
Teraz zdefiniujmy $f(x) = Q(x) - S(x)$ dla $x \in [0, P_1]$. Jasno widać, że $f(0) = Q(0) > 0$ i $f(P_1) = -S(P_1) < 0$, czyli $f(0)f(P_1) < 0$. Stąd i z własności Darboux istnieje $P_0 \in [0, P_1]$ takie, że $f(P_0) = 0$. Zatem $Q(P_0) - S(P_0) = 0$, czyli $Q(P_0) = S(P_0)$, czyli istnieje *cena równowagi* P_0: cena, dla której podaż i popyt są równe.

Własność Darboux - odwrócenie?



Na koniec, warto zauważyć, że implikacji w twierdzeniu Darboux nie da się odwrócić: na przykład funkcja $f(x) = 2x^2 - 1$ ma w przedziale $[-1, 1]$ miejsce zerowe (a nawet dwa), ale $f(-1)$ i $f(1)$ są tego samego znaku.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Własność Darboux można wykorzystać do znalezienia jednego przybliżonego pierwiastka dowolnego równania.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Własność Darboux można wykorzystać do znalezienia jednego przybliżonego pierwiastka dowolnego równania.

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Własność Darboux można wykorzystać do znalezienia jednego przybliżonego pierwiastka dowolnego równania.

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Dokładne rozwiązanie takiego równania nie leży w zakresie naszych możliwości (nawet po ukończeniu tego kursu). Jednak dzięki własności Darboux, dość łatwo możemy oszacować, gdzie takie rozwiązanie musi się znajdować.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x^3 - 2^x$. Miejsce zerowe tej funkcji spełnia zadane równanie.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x^3 - 2^x$. Miejsce zerowe tej funkcji spełnia zadane równanie. Wystarczy zauważyć, że $f(1) = -1$ i $f(2) = 4$, by, na podstawie własności Darboux, móc zapewnić, że istnieje miejsce zerowe funkcji f w przedziale $[1, 2]$.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x^3 - 2^x$. Miejsce zerowe tej funkcji spełnia zadane równanie. Wystarczy zauważyć, że $f(1) = -1$ i $f(2) = 4$, by, na podstawie własności Darboux, móc zapewnić, że istnieje miejsce zerowe funkcji f w przedziale $[1, 2]$. Zatem możemy podać przybliżone rozwiązanie w postaci $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Warto zauważyć, że choć wiemy, że istnieje rozwiązanie tego równania w przedziale $[1, 2]$, to z twierdzenia Darboux nie wynika, że to rozwiązanie jest jedyne: nawet w tym przedziale takich rozwiązań może być kilka.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Warto zauważyć, że choć wiemy, że istnieje rozwiązanie tego równania w przedziale $[1, 2]$, to z twierdzenia Darboux nie wynika, że to rozwiązanie jest jedyne: nawet w tym przedziale takich rozwiązań może być kilka. Poza tym, mogą istnieć rozwiązania poza tym przedziałem (mogą Państwo we własnym zakresie sprawdzić, że to równanie ma też rozwiązanie w przedziale $[9, 10]$.)

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Dodatkowo, to nie jest koniec możliwości przybliżeń rozwiązania za pomocą własności Darboux.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Dodatkowo, to nie jest koniec możliwości przybliżeń rozwiązania za pomocą własności Darboux. Moglibyśmy iść dalej i obliczyć $f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} - 2\sqrt{2} > 0$, a skoro $f(1) < 0$, rozwiązanie musi być w przedziale $[1, \frac{3}{2}]$.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Dodatkowo, to nie jest koniec możliwości przybliżeń rozwiązania za pomocą własności Darboux. Moglibyśmy iść dalej i obliczyć $f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} - 2\sqrt{2} > 0$, a skoro $f(1) < 0$, rozwiązanie musi być w przedziale $[1, \frac{3}{2}]$. Zatem moglibyśmy napisać $x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$.

Własność Darboux - przybliżone rozwiązywanie równań

Zadanie

Znaleźć przynajmniej jedno x spełniające równanie:

$$x^3 = 2^x,$$

z dokładnością do $\frac{1}{2}$.

Dodatkowo, to nie jest koniec możliwości przybliżeń rozwiązania za pomocą własności Darboux. Moglibyśmy iść dalej i obliczyć $f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} - 2\sqrt{2} > 0$, a skoro $f(1) < 0$, rozwiązanie musi być w przedziale $[1, \frac{3}{2}]$. Zatem moglibyśmy napisać $x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$. Kontynuując to rozumowanie, moglibyśmy przybliżyć prawdziwe rozwiązanie z dowolną dokładnością.