
W tym rozdziale zajmiemy się definiowaniem ciągów i innych pojęć w sposób rekurencyjny tj. na podstawie poprzednich wyrazów tego ciągu.

I. Indukcja matematyczna

Zajmiemy się pewną techniką dowodzenia wielu zdań jednocześnie. Przyda nam się to do zrozumienia kilku późniejszych zagadnień, związanych z rekurencją. Na przykład do wchodzenia po drabinie.

Twierdzenie 1 (Zasada indukcji matematycznej)**.** *Niech $p(m), p(m+1), \ldots$ będzie ciągiem zdań. Jeśli*
1) zdanie $p(m)$ jest prawdziwe,
2) z prawdziwości zdania $p(k)$ wynika prawdziwość zdania $p(k+1)$ dla $k \geq m$,
to wszystkie te zdania są prawdziwe.

W powyższym twierdzeniu warunek 1 nazywamy warunkiem początkowym, a warunek 2 krokiem indukcyjnym.
Przykład Czy $37^{500} - 37^{100}$ jest podzielne przez 10? Pomocniczo udowadniamy, że $n^5 - n$ jest zawsze podzielne przez 5.
Przykład $n! \geq 2^n$ (dla $n \geq 4$).
Przykład Wszystkie liczby naturalne mają ciekawe własności.
Przykłady na błędy w rozumowaniu indukcyjnym:
Przykład $n = n + 5$ - brak sprawdzenia warunku 1.
Przykład Wszyscy ludzie są jednakowego wzrostu (przejście indukcyjne).
Metodę indukcji matematycznej stosujemy najczęściej, gdy:
a) Znamy na początku odpowiedź, chcemy ją udowodnić,
b) Wiemy, jak wyprowadzić odpowiedź w kolejnym kroku z odpowiedzi w poprzednim kroku.
c) Próbujemy zgadnąć prawidłowe rozwiązanie.

II. Definicje rekurencyjne

Mówimy, że zbiór pewnych obiektów jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeśli pewne elementy zostały umieszczone w zbiorze na początku, a inne się tam znajdują w wyniku pewnego „przepisu” na tworzenie kolejnych elementów zbioru za pomocą poprzednich.

Definicja 1. *Definicja rekurencyjna zbioru S składa się z dwóch części:*
1) Warunku początkowego postaci $X \subset S$ (w wypadku ciągu, zdefiniowanie pierwszych wyrazów)
2) Warunku rekurencyjnego: jeśli element s powstaje z elementów zbioru S w wyniku zastosowania pewnych reguł, to $s \in S$.
Element $s \in S$ wtedy i tylko wtedy gdy warunki 1 i 2 to wymuszają.

Przykład Silnia.
Przykład Ciąg Fibonacciego.
Przykład Nadawanie imion w plemieniu Kikuyu.
Przykłady Błędne definicje rekurencyjne: określanie elementów za pomocą elementów niezdefiniowanych („żeby zrozumieć rekurencje, trzeba zrozumieć rekurencje”), niejednoznaczna definicja.
Dlatego zawsze należy dowodzić, że definicje rekurencyjne są poprawne. Najlepiej, by definicja była jednoznaczna tj. nowe elementy zbioru S otrzymujemy tylko w jeden sposób.
Przykład Zagadnienie $3x + 1$ - dobra definicja, o której nie wiadomo, co definiuje.

Definicja 2. ***Algorytm rekurencyjny*** *to algorytm, który w trakcie wykonywania wywołuje sam siebie.*

Przykład Wywoływanie omówionych definicji rekurencyjnych, matrioszki, metoda „dziel i rządź”.

III. Rozwiązywanie liniowych zależności rekurencyjnych

Często mamy do czynienia z sytuacją, gdy dosyć łatwo jest uzyskać wzór rekurencyjny ciągu, ale nie wzór dokładny. Gdy potrzebujemy konkretnego wyrazu, mając jedynie definicję rekurencyjną, zazwyczaj musimy obliczyć wszystkie poprzednie wyrazy, chyba, że uda się nam uzyskać wzór ogólny na wyraz ciągu z definicji rekurencyjnej. Generalnie, chcemy ten wzór otrzymać w postaci zwartej tj. takiej, że wzór na wyraz ciągu nie odwołuje się do wzorów na inne jego wyrazy.

Przykład Wieże z Hanoi (E.Lucas 1883). ($T_0 = 0; T_n = 2T_{n-1} + 1$). Wzór ogólny.

Jest wiele ogólnych metod, często dość wyrafinowanych, przechodzenia z postaci rekurencyjnej do zwartej. Jako przykład, przedstawimy jedną, dla ciągów określonych wzorami rekurencyjnymi typu $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ (jak np. ciąg Fibonacciego), przy założeniu, że znamy s_1 i s_0.

Po pierwsze, łatwo zauważyć, że jeśli $b = 0$, czyli $s_n = as_{n-1}$ to $s_n = a^n s_0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Jeśli $a = 0$ to łatwo jest udowodnić, że $s_{2n} = b^n s_0$ i $s_{2n+1} = b^n s_1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Zatem odtąd zakładamy: $a \neq 0, b \neq 0$.

Definicja 3. *Dla zależności rekurencyjnej* $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ równaniem charakterystycznym *nazywamy:*

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Twierdzenie 2. *Dla podanych wcześniej oznaczeń, jeśli równanie charakterystyczne ma dwa różne pierwiastki r_1 i r_2, to rozwiązaniem rekurencji jest:*

$$s_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,$$

dla pewnych stałych c_1 i c_2.

Jeśli równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek podwójny r to rozwiązaniem rekurencji jest:

$$s_n = c_1 r^n + c_2 n r^n,$$

dla pewnych stałych c_1 i c_2.

Powyższe postaci rozwiązań rekurencji jednorodnych nazywamy rozwiązaniami ogólnymi *(nie uwzględniają one danych s_0 i s_1).*

Stałe c_1 i c_2 można obliczyć podstawiając do otrzymanego wzoru s_0 i s_1 (jeśli są dane), otrzymując tzw. rozwiązanie szczególne *(uwzględniające warunki początkowe)*

Przykład Ciąg Fibonacciego.

Przykład $s_0 = 1$, $s_1 = -3$, $s_n = 6s_{n-1} - 9s_{n-2}$.

Uwaga! Twierdzenie powyższe działa, nawet jeśli pierwiastki nie są rzeczywiste!

IV. Rekurencje liniowe niejednorodne

Niejednorodną liniową rekurencją (formalnie: drugiego stopnia) będziemy nazywać równanie postaci: $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$. Funkcję $f(n)$ nazywamy *wyrazem wolnym rekurencji.*

Twierdzenie 3. *Rozwiązaniem ogólnym rekurencji $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ jest*

$$s_n = \tilde{s}_n + s_n^*,$$

gdzie $\tilde{s}_n$ jest jest ogólnym rozwiązaniem rekurencji jednorodnej $s_n = as_{n-1}+bs_{n-2}$ (uzyskanym jak w poprzednim podrozdziale), a s_n^* jest dowolnym szczególnym rozwiązaniem rekurencji $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ (dla dowolnie wybranych warunków początkowych).

Niestety, nie ma ogólnej metody pozwalającej na wskazanie s_n^* - to rozwiązanie trzeba zgadnąć. Jednak w kilku typowych sytuacjach, nasze „zgadywanie” da się zalgorytmizować (tzw. metoda przewidywań):

Twierdzenie 4. *(Metoda przewidywań)*
Przy wcześniejszych oznaczeniach zakładamy, że wyraz wolny jest funkcją $f(n) = P(n)q^n$, *gdzie* $P(n)$ *jest wielomianem.*
Wtedy rozwiązanie szczególne rekurencji jest postaci $s_n^* = Q(n) \cdot q^n \cdot n^k$, *gdzie* $Q(n)$ *jest wielomianem stopnia takiego jak* $P(n)$, *a* k *- krotnością pierwiastka* q *w równaniu charakterystycznym.*

Współczynniki wielomianu Q obliczamy wstawiając s_n^* do równania rekurencyjnego.
Przykład $s_0 = -3$, $s_1 = 36$, $s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n$.
Przykład $s_1 = 1$, $s_n = 2s_{n-1} + 1$.
Przypominam, że stała to też wielomian (stopnia zero).