I. Motywacja

Czas przyglądnąć się typowym zastosowaniom całek. Całki nieoznaczone służą głównie do obliczania częściej występujących w problemach praktycznych całek oznaczonych.
Przykład. (Zagregowany popyt i nadwyżka konsumentów). Rozważamy funkcję odwrotną do funkcji popytu na pewien towar od ceny (czyli funkcję ceny od popytu): $P(q)$. Załóżmy, że na rynku doskonale konkurencyjnym producenci sprzedają ilość towaru Q^* po cenie p^*. Z mikroekonomii wiemy, że w wypadku niedoskonałej konkurencji, a szczególnie w wypadku monopolu, ceny mogą być wyższe. Spróbujmy oszacować, ile zyskują konsumenci z powodu istnienia konkurencji w porównaniu z „doskonale dyskryminującym" monopolem (tzw. *nadwyżkę konsumentów*). Monopolista, jako jedyny dostawca, może dyktować ceny i nie wypuszczać na rynek kolejnej partii towaru, póki nie sprzeda poprzedniej. Dlatego wypuszcza na rynek kolejne partie tej samej wielkości δq, (oznaczamy $q_k = k\delta q$, $q_n = Q^*$), po cenach $p_1 = P(q_1)$, $p_2 = P(q_2), \ldots$. Całkowity dochód monompolisty wynosi wtedy $R = p_1\delta q + p_2\delta q + \ldots p_n\delta q$. Oczywiście, dochód będzie tym większy, im mniejsze δq. Po odjęciu p^*Q^* (wydatki konsumentów w warunkach doskonałej konkurencji) otrzymamy wspomnianą nadwyżkę konsumentów. Jeśli funkcja P jest ciągła, a δq dąży do zera to całkowity dochód monopolisty możemy zinterpretować jako pole pod wykresem funkcji P dla argumentów od 0 do Q^*.
(Rysunek)
Spójrzmy na sprawę z innej perspektywy: rozważmy funkcję przychodu R monopolisty w zależności od popytu q, której wartości są równe polu pod wykresem funkcji $p(q)$. W szczególności $R(Q^*)$ jest całkowitym dochodem monopolisty w naszej sytuacji. Zauważmy, że $P(q+\delta q)\delta q \leq R(q+\delta q) - R(q) \leq P(q)\delta q$. Dzieląc stronami te nierówności przez δq i zmierzając z jego wartością do zera otrzymamy: $R'(q) = P(q)$ (czyli R jest funkcją pierwotną P). Zatem szukanie pola pod wykresem funkcji P można sprowadzić do obliczania wartości funkcji pierwotnej P.
Przykład do przemyślenia na zadanie domowe. Analogicznie rozważyć wykres prędkości ruchu jakiegoś obiektu od czasu. Jaki związek ma przebyta droga z polem pod wykresem? Przeprowadzić podobną analizę, jak w pierwszym przykładzie.
Uogólnimy i sformalizujemy te rozważania.

II. Definicje i podstawowe twierdzenia o całce oznaczonej

Definicja 1. *(Podział przedziału, średnica podziału, podział normalny) Niech będzie dany przedział $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.*
*Ciąg skończony $P_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy n-*tym podziałem przedziału *jeżeli punkty tego ciągu dzielą ten przedział na n części tj. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.*
Liczbę $\Delta_n = \max_{i\in\{1,\ldots n\}} \Delta x_i$ równą długości najdłuższego z podprzedziałów $\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$ nazywamy średnicą podziału *P.*
Ciąg podziałów $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ odcinka $[a, b]$ nazywamy normalnym, jeśli $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0$.

Definicja 2. *(Całka oznaczona) Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $[a, b]$ o ograniczonym zbiorze wartości. Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ przedziału $[a, b]$, niezależnie od wyboru punktów wewnętrznych $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ w każdym podprzedziale każdego podziału, granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ istnieje i jest równa S to S nazywamy* całką oznaczoną *(w sensie Riemanna) z funkcji f w przedziale $[a, b]$ i oznaczamy symbolem $\int_a^b f(x)dx$.*

Wniosek 1. *Pole pomiędzy wykresem funkcji $f(x)$ a osią OX i prostymi $x = a$ i $x = b$, z zachowaniem znaków (tj. część pola poniżej osi liczy się ze znakiem minus) jest równe $\int_a^b f(x)dx$.*

Przykład $f(x) = \cos x$ w przedziale $[0, \pi]$.

Wniosek 2. *Pole pomiędzy wykresem funkcji $f(x)$ a wykresem funkcji $g(x)$ i prostymi $x = a$ i $x = b$, z zachowaniem znaków (tj. część pola poniżej wykresu $g(x)$ liczy się ze znakiem minus) jest równe $\int_a^b f(x) - g(x)dx$.*

Całki oznaczone obliczamy (zazwyczaj) wyznaczając najpierw całkę nieoznaczoną funkcji podcałkowej, a następnie podstawiając tzw. granice całkowania do wyniku.

Twierdzenie 3 (Zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego)**.** *Jeżeli f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i F jest jej funkcją pierwotną to $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

Jeszcze kilka twierdzeń pomocnych w obliczaniu całek:

Twierdzenie 4.
a) Jeśli f jest ciągła w (a, b) i $a < c < b$ to $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
b) Jeśli f jest funkcją nieparzystą, to $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ dla dowolnego $a > 0$.
c) Jeśli f jest funkcją parzystą, to $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ dla dowolnego $a > 0$.
d) Jeśli $f(x) \geq 0$ w przedziale $[a, b]$ to $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Przykład Pole pomiędzy wykresami funkcji $f(x) = x$ i $f(x) = x^2$.
Przykład Pole pomiędzy krzywymi $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{3}{4}x - 1$ oraz $y = \frac{1}{x}$.

III. Wartość średnia
Całka jest swego rodzaju uogólnieniem sumy na nieskończenie wiele (a nawet, w pewnym matematycznym sensie, trochę więcej) elementów. Dlatego nic dziwnego, że umożliwia uogólnienie średniej arytmetycznej ze skończonego zbioru liczb na cały przedział.

Twierdzenie 5 (Twierdzenie o wartości średniej)**.** *Jeśli f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ to jej wartość średnią w tym przedziale można wyrazić wzorem*

$$f_{sr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

IV. Całkowanie numeryczne: kwadratura trapezów
Jak wspomniałem, niektórych całek (np. eliptycznych) nie da się obliczyć za pomocą skończonej liczby operacji algebraicznych. Inne z kolei da się obliczyć, ale ich obliczanie jest czasochłonne i skomplikowane. Często w zastosowaniach wystarczy nam wynik przybliżony, który otrzymać możemy w sposób o wiele prostszy niż wynik dokładny. Wtedy pomocne bywają *kwadratury*, czyli wzory na przybliżone obliczanie całek oznaczonych. Znanych jest wiele rodzajów kwadratur: najpopularniejsze są probabilistyczne (np. kwadratury Monte Carlo), ale my zajmiemy się najprostszą kwadraturą deterministyczną: wzorem trapezów.
(Rysunek)
Procedura jest następująca: dzielimy przedział $[a, b]$, na którym zadana jest funkcja ciągła f, na n równych odcinków o długości $h = \frac{b-a}{n}$. Punkty podziału oznaczamy $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$. Następnie pole figury nad przedziałem $[x_i, x_{i+1}]$ zastępujemy trapezem o wierzchołkach $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Pole takiego trapezu jest równe $\frac{1}{2}h[f(x_i) + f(x_{i+1})]$. Łatwo zauważyć, że gdy n zmierza do nieskończoności, z definicji całki Riemanna, suma pól tych wszystkich trapezów będzie zmierzała do pola pod wykresem funkcji f. Dlatego, po zsumowaniu tych wszystkich pól otrzymujemy:

Twierdzenie 6 (Kwadratura trapezów)**.**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}h[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] = T_n.$$

Przybliżenie to jest tym dokładniejsze, im większe jest n. Dokładnie, jeśli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na $[a, b]$ to możemy ograniczyć różnicę pomiędzy „prawdziwą” wartością całki po lewej stronie a jej n-tym przybliżeniem po prawej stronie poprzez:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n\right| \leq \frac{(b-a)^3 M''}{12n^2},$$

gdzie $M'' = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$*. Ze względu na mianownik, różnica ta zmierza do zera przy zwiększającym się* n*.*

W istocie, różnica pomiędzy n-tym przybliżeniem, a dokładną wartością całki może być (i zazwyczaj jest) dużo mniejsza niż podane oszacowanie.
Przykład Obliczenie $\ln 5$ dla $n = 8$.

V. Całki niewłaściwe

Całki oznaczone, których granice całkowania wypadają w końcach przedziałów określoności funkcji podcałkowej są szalenie przydatne, szczególnie w statystyce.
Załóżmy, że f jest określona w przedziale $[a, b)$, gdzie $a \in \mathbb{R}, a < b, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (b może przyjmować nieskończone wartości) i b jest końcem przedziału określoności funkcji f.

Definicja 3. Całką niewłaściwą *z funkcji* f *na przedziale* $[a, b)$ *nazywamy granicę* $\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$*. Jeśli ta granica istnieje i jest skończona mówimy, że całka niewłaściwa jest* zbieżna*. W innym wypadku - że jest* rozbieżna*.*

Analogicznie określamy całkę niewłaściwą na przedziale $(a, b]$, gdzie a jest końcem przedziału określoności f. Jeśli obydwie granice całkowania są końcami przedziału określoności, dzielimy przedział całkowania na dwie części i obliczamy dwie całki niewłaściwe.
Przykład $\int_3^5 \frac{1}{x-3}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$.
Całkę niewłaściwą interpretujemy jako pole obszaru nieograniczonego pomiędzy osią OX a wykresem funkcji nieograniczonej lub określonej na przedziale nieograniczonym. Okazuje się, że takie obszary, choć nieograniczone, mogą mieć skończone pole powierzchni.
Ze względu na badania związane z rozkładem normalnym warto wiedzieć, że:

Twierdzenie 7. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$.

Powyższy wzór jest o tyle zdumiewający, że łączy statystyczne własności populacji (np. rozkład długości życia albo rozkład wzrostu w określonej grupie ludzi) z liczbą π, czyli stosunkiem obwodu koła do jego średnicy.